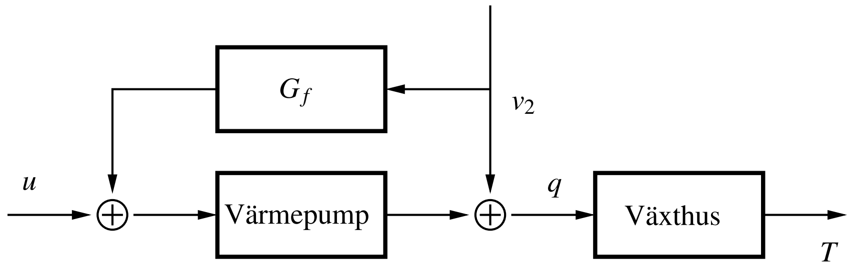
Lösningar till tentamen i Systemteknik 2013-05-28

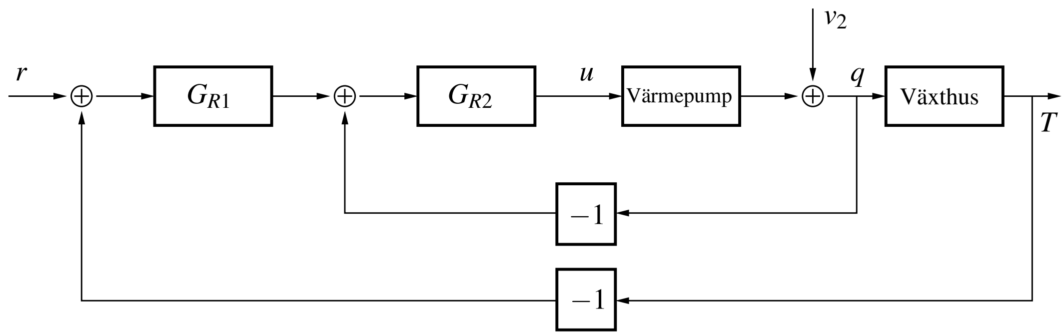
1 a. Störningen I påverkar mätningen av temperaturen, vilket betyder att denna kommer in som v_3. Störningen II verkar på växthuset och kommer därför in som v_2 i blockschemat.

b. Framkopplingen från störningen v_2 visas i figur 1.



Figur 1 Blockschema över framkopplingen i uppgift 1.

c. Kaskadregleringsstrukturen visas i figur 2.



Figur 2 Blockschema över kaskadregleringen i uppgift 1.

d. Eftersom systemet är asymptotiskt stabilt så ges den statiska förstärkningen av $G_v(0) = K_v = T(\infty) - T(0) = 5°C$. Tidskonstanten T_v är den tid det tar för temperaturen att nå 63% av sitt slutvärde, d.v.s. här ca $28°C$. Avläsning i figuren ger $T_v = 1$ h.

2 a. De stationära punkterna är lösningarna till

$$f_1(H,L) = \frac{H}{10}\left(1 - \frac{H}{200}\right) - \frac{3HL}{100+H} = 0 \tag{1}$$

$$f_2(H,L) = \frac{1.5HL}{100+H} - \frac{1}{2}L = 0. \tag{2}$$

Lösning av (2) ger $L = 0$ eller $H = 50$. Lösning av (1) med $L = 0$ ger $H = 0$ eller $H = 200$. Insättning av $H = 50$ i (1) ger $L = 15/4$. De stationära punkterna är således

$$\left(H^0, L^0\right) = (0,0), (200,0), (50, 15/4)$$

Den första stationära punkten motsvarar att det varken finns några harar eller lodjur. Den andra punkten motsvara ett scenario där lodjuren dött ut och antalet harar är 200. Den tredje punkten motsvarar att harar och lodjur samexisterar. I stationäritet finns det då 50 harar och i den mån det är möljigt 3.75 lodjur.

b. Den enda stationära punkt är de två arterna samexisterar är $\left(H^0, L^0\right) = (50, 15/4)$. De partiella derivatorna är

$$\frac{\partial f_1}{\partial H} = \frac{1}{10} - \frac{1}{1000}H - \frac{300L}{(100+H)^2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial L} = \frac{-3H}{100+H}$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial H} = \frac{150L}{(100+H)^2}, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial L} = \frac{H-50}{100+H}.$$

Insätttning av den stationära punkten ger

$$\frac{\partial f_1(H^0,L^0)}{\partial H} = 0, \quad \frac{\partial f_1(H^0,L^0)}{\partial L} = -1$$
$$\frac{\partial f_2(H^0,L^0)}{\partial H} = \frac{1}{40}, \quad \frac{\partial f_2(H^0,L^0)}{\partial L} = 0$$

Inför de nya variablerna

$$\Delta H = H - H^0, \qquad \Delta L = L - L^0.$$

Det linjäriserade systemet ges av

$$\begin{bmatrix} \dot{\Delta H} \\ \dot{\Delta L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{40} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta H \\ \Delta L \end{bmatrix}$$

c. Systemet poler ges av egenvärdena till det linjäriserade systemets A-matris.

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & 1 \\ -\frac{1}{40} & s \end{vmatrix} = s^2 + \frac{1}{40}.$$

Systemets poler ligger i $s = \frac{\pm i}{\sqrt{40}}$. Systemet är således stabilt men ej asymptotiskt stabilt. Att systemet är (marginellt) stabilt innebär att en godtyckligt liten störning kommer få populationerna av harar och lodjur att oscillera kring den stationära punkten.

3 a. Överföringsfunktionen för en PI-regulator är

$$G_R(s) = K\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)$$

och det slutna systemets överföringsfunktion är

$$G_{cl}(s) = \frac{G_R G_P}{1 + G_R G_P} = \frac{(s+1)K(sT_i+1)}{T_i(K-1)s^2 + (KT_i + K + 3T_i)s + K} =$$
$$= \frac{(s+1)K(sT_i+1)/(T_i(K-1))}{s^2 + \frac{KT_i+K+3T_i}{T_i(K-1)}s + \frac{K}{T_i(K-1)}}$$

Ett andra ordningens system ($s^2 + a_1 s + a_2$) är asymptotiskt stabilt om och endast om det karakteristiska polynomets samtliga koefficienter är positiva ($a_1 > 0$, $a_2 > 0$). Eftersom integraltiden T_i alltid är större än noll är det slutna systemet således asymptotiskt stabilt för alla PI-regulatorer med $K > 1$.

b. Överföringsfunktionen från v till e är

$$G_{ev}(s) = -\frac{G_P(s)}{1+G_R(s)G_P(s)} = -\frac{s(s+1)T_i}{T_i(K-1)s^2+(KT_i+K+3T_i)s+K}$$

Laplacetransformering av laststörningen ger $V(s) = \frac{1}{s^2}$. Under förutsättning att PI-regulatorn valts så att systemet är asymptotiskt stabilt kan slutvärdesteoremet användas och det stationära felet ges då av

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sG_{ev}(s)\frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s\to 0} -\frac{(s+1)T_i}{T_i(K-1)s^2+(KT_i+K+3T_i)s+K} = -\frac{T_i}{K} \end{aligned}$$

4. Lösningen består av att vi tar fram vilket system som lättast blir instabilt vid återkoppling med en P-regulator (dvs en förstärkning K), vilket ges av amplitudmarginalen. Denna kan avläsas i diagrammen genom att hitta var Nyquistkurvan skär negativa reella axeln. Amplitudmarginalen ges då av $-1/x_c$, om x_c är koordinaten för skärningspunkten. Avläsning i diagrammen ger att $A_m^1 \approx 2.5$, $A_m^2 \approx 1.42$, $A_m^3 \approx 3.3$, vilket således tillåter ett maximalt K på 1.42

5. Bland överföringsfunktionerna G_1-G_4 finns inget system som har något nollställe i höger halvplan (ingen av överföringsfunktionerna har något nollställe alls) och inget system som är instabilt (dvs. har någon pol i höger halvplan). Detta betyder att stegsvar B (som initialt går åt fel håll) och stegsvar F (som ej är begränsat) kan uteslutas.

G_1: Systemet har två reella poler i -1 och är därmed asymptotiskt stabilt. Den statiska förstärkningen är $G(0) = 1$. Eftersom polerna är reella fås ingen översläng, så detta måste svara mot stegsvar A, som har slutvärdet 1.

G_2: Systemet har två komplexkonjugerade poler i $-1 \pm i$ och är därmed asymptotiskt stabilt. Den statiska förstärkningen är $G(0) = 1$. Detta måste svara mot stegsvar E som har en översläng och slutvärdet 1.

G_3: Systemet har två poler i -1 och är därmed asymptotiskt stabilt. Den statiska förstärkningen är $G(0) = 0.5$. Detta måste därför svara mot stegsvar D som har slutvärdet 0.5.

G_4: Systemet har två poler på imaginära axeln i $\pm i$ och är därmed stabilt men inte asymptotiskt stabilt. Därför måste detta svara mot stegsvar C, som är begränsat men ej når ett slutvärde.

6 a. Då insignalen till ett linjärt tidsinvariant system är en sinussignal $u(t) = k\sin(\omega t)$ ges utsignalen av

$$y(t) = k|G(i\omega)|\sin(\omega t + \arg(G(i\omega))).$$

Avläsning i Bodediagrammet vid $\omega = 0.4$ rad/s ger

$$|G(0.4i)| = 0.3, \quad \arg(G(0.4i)) = -132^\circ.$$

Utsignalen blir således

$$y(t) = 0.6\sin(0.4t - 132^\circ)$$

b. Då systemet återkopplas med en P-regulator med förstärkningen $K = 1$ avläses fasmarginalen som

$$\varphi_m = 180^\circ + \arg G(i\omega_c) = 28.1^\circ.$$

7 a. Överföringsfunktionen mellan u_2 och y_2 är

$$G_{12}(s) = \frac{1}{1-P_2(s)} + P_3(s).$$

b. Överföringsfunktionen mellan u_1 och y_1 är

$$G_{11}(s) = \frac{P_1(s)}{1-P_2(s)}.$$

Insignalen u_1 har ingen påverkan på y_2 och således är

$$G_{21}(s) = 0.$$

Överföringsfunktionen mellan u_2 och y_2 är $G_{22}(s) = P_3$. Överföringsmatrisen är således

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{P_1(s)}{1-P_2(s)} & \dfrac{1}{1-P_2(s)} + P_3(s) \\ 0 & P_3(s) \end{bmatrix}$$

c. Insättning av processmodellerna i (b) ger

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{(s-1)(s+2)}{(s+3)^2} & \dfrac{s^2+6s+11}{(s+3)(s+1)} \\ 0 & \dfrac{3}{s+1} \end{bmatrix}.$$

Eftersom alla delsystem är stabila ges ges den statiska förstärkninen av

$$G(0) = \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{9} & \dfrac{11}{3} \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Att en statisk särkoppling D särkopplar systemet och ger det särkopplade systemet statisk förstärkning 1 är detsamma som

$$G(0)D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow D = G(0)^{-1} = \begin{bmatrix} -4.5 & 5.5 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

8 a. Följande sortering sker

- Djur som är 2 år eller yngre, oavsett kön, släpps tillbaka i hagen .
- Tjurar yngre 13 år släpps också tillbaka.
- Tjurar äldre än 12 år skickas till slakt.
- Kor äldre än 2 år mjölkas och släpps sedan tillbaka.

b. Om villkoret `AGE>2 & FEMALE` ändras till
`2<AGE<10 & FEMALE` och `AGE>12 & !FEMALE` ändras till
`(AGE>12 & !FEMALE) | (AGE>10 & FEMALE)` uppnås eftersträvat resultat.