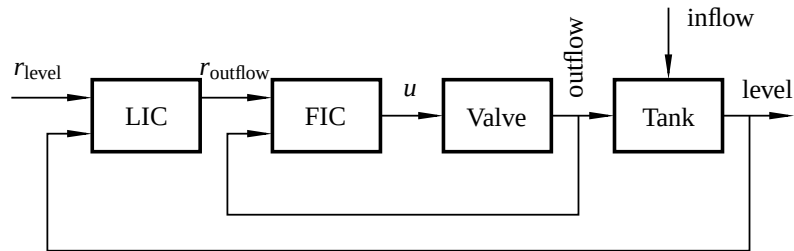


Lösningar till tentamen i Systemteknik/Processreglering 2012-05-23

1. Regulatorstrukturen kallas kaskadreglering och illustreras nedan. Inflödet till buffert-tanken kan betraktas som en störning på processen. Processen kan ritas som två separata block (tank och pump) eller som ett block med två utsignaler.



- 2 a. PI-regulatorns överföringsfunktion är

$$G_r(s) = K(1 + \frac{1}{sT_i})$$

Det slutna systemets överföringsfunktion från r till e ges av

$$G_{er}(s) = \frac{1}{1 + G_p(s)G_r(s)} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3s+1} \frac{K(sT_i+1)}{sT_i}} = \frac{3T_i s^2 + T_i s}{3T_i s^2 + (2KT_i + T_i)s + 2K}$$

Den karakteristiska polynomet är

$$3T_i s^2 + (2KT_i + T_i)s + 2K$$

Med instatta värden på T_i och K fås

$$6s^2 + 14s + 6$$

Alla koefficienter i det karakteristiska polynomet är positiva, vilket betyder att systemet är stabilt (och även asymptotiskt stabilt).

- b. Rampsignalens Laplacetransform ges av

$$R(s) = \frac{1}{s^2}$$

och felets Laplacetransform blir

$$E(s) = G_{er}(s)R(s) = \frac{3T_i s^2 + T_i s}{3T_i s^2 + (2KT_i + T_i)s + 2K} \cdot \frac{1}{s^2}$$

Det stationära felet ges av slutvärdesteoremet:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3T_i s + T_i}{3T_i s^2 + (2KT_i + T_i)s + 2K} = \frac{T_i}{2K} = \frac{1}{3}$$

Slutvärdet existerar eftersom $sE(s)$ är asymptotiskt stabil enligt a-uppgiften.

- 3 a. Stegsvaret slutar på 4, vilket är systemets statiska förstärkning. Stegsvaret börjar vid tiden 2 s, vilket är systemets död tid. Stegsvaret börjar med en derivata skild från 0 och med ett typiskt svar för en enkel pol. Tidskonstanten avläses vid 63% av stegsvarets slutvärde (= 2.5), vilket inträffar 1 s efter det fördröjda svarets början. Systemets överföringsfunktion är alltså

$$G(s) = \frac{4}{1+s} e^{-2s}$$

- b. Ett exempel (bland många) är koncentrationsdynamik i en omrörd tank, där insignalen är flödet av tillsatt ämne, och utsignalen är utflödets koncentration, vilken mäts en bit nerströms från utloppet till tanken.

- 4 a. I stationaritet är $\frac{dh}{dt} = 0$, vilket ger

$$\gamma_1 h^{-1.5} = \gamma_2 h^{-2} q_{in}$$

$$\gamma_2 q_{in} = \gamma_1 \sqrt{h}$$

$$\Rightarrow h^0 = \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} q_{in}^0 \right)^2, h > 0$$

Med detta kan vi nu räkna ut q_{ut}^0 :

$$q_{ut}^0 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \sqrt{h^0} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} q_{in}^0 = q_{in}^0$$

(Som väntat blir det stationära utflödet lika med inflödet.)

- b. Vi utgår från

$$\dot{h} = -\gamma_1 h^{-1.5} + \gamma_2 h^{-2} q_{in} = f(h, q_{in})$$

$$q_{ut} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} h^{0.5} = g(h)$$

Sedan tar vi partialderivator av f och g , med avseende på tillstånd och insignal:

$$\frac{\partial f}{\partial h} = 1.5 \gamma_1 h^{-2.5} - 2 \gamma_2 h^{-3} q_{in}$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_{in}} = \frac{\gamma_2}{h^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial h} = 0.5 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} h^{-0.5}$$

Nu sätter vi in värdet på parametrar samt den stationära punkten $h^0 = \left(\frac{0.3}{0.2} 0.5 \right)^2 = 0.5625$.

$$\frac{\partial f}{\partial h} = -0.42$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_{in}} = 0.95$$

$$\frac{\partial g}{\partial h} = 0.44$$

Vi inför nya variabler

$$\Delta h = h - h^0$$

$$\Delta q_{in} = q_{in} - q_{in}^0$$

$$\Delta q_{ut} = q_{ut} - q_{ut}^0$$

och får den linjära tillståndsmodellen

$$\Delta \dot{h} = -0.42\Delta h + 0.95\Delta q_{in}$$

$$\Delta q_{ut} = 0.44\Delta h$$

- 5 a. Systemets poler är $s_1 = -1$ och $s_2 = -2$. Tidskonstanterna ges av

$$T_1 = -1/s_1 = 1 \text{ timme}$$

$$T_2 = -1/s_2 = 0.5 \text{ timme}$$

- b. Insignalen ges av $T_{in}(t) = 3 \cdot \sin(\frac{2\pi}{24}t)$, vilket ger utsignalen

$$T_{ut}(t) = 3 \cdot \left| G\left(i\frac{\pi}{12}\right) \right| \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}t + \arg\{G\left(i\frac{\pi}{12}\right)\}\right)$$

där $G(i\omega) = \frac{2}{(i\omega+1)(i\omega+2)}$. Vi får

$$\left| G\left(i\frac{\pi}{12}\right) \right| = \frac{2}{\sqrt{\frac{\pi^2}{12^2} + 1} \sqrt{\frac{\pi^2}{12^2} + 2^2}} \approx 0.96$$

$$\arg\{G\left(i\frac{\pi}{12}\right)\} = -\arctan\left(\frac{\pi}{12}\right) - \arctan\left(\frac{\pi}{24}\right) \approx -0.39$$

Kylvattentemperaturen ut från fabriken varierar alltså som

$$T_{ut}(t) = 2.88 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}t - 0.39\right)$$

- 6 a. Dynamiken i P_1 är snabbast, den bör därför utnyttjas för att snabbt korrigera för mindre störningar i systemet. Dock kan den inte kompensera för större störningar, eftersom den har låg förstärkning och därför bara kan förändra utsignalen förhållandevis lite innan den mätas. P_2 har högre förstärkning och kan motverka större störningar men är långsammare, den bör därför användas för att återställa AR så att denna styrsignal inte mätas.

- b. Det öppna systemets överföringsfunktion kan skrivas:

$$G_{op}(s) = (P_1(s) - P_2(s)R_2(s))R_1(s)$$

Det slutna systemet kan då skrivas:

$$G_{cl}(s) = \frac{(P_1(s) - P_2(s)R_2(s))R_1(s)}{1 + (P_1(s) - P_2(s)R_2(s))R_1(s)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\frac{2}{1+2s} - \frac{5}{1+20s}K_2\left(1 + \frac{1}{sT_{i2}}\right)\right)K_1}{1 + \left(\frac{2}{1+2s} - \frac{5}{1+20s}K_2\left(1 + \frac{1}{sT_{i2}}\right)\right)K_1} = \\
&= \frac{2K_1s(1+20s) - 5K_1K_2\left(s + \frac{1}{T_{i2}}\right)(1+2s)}{s(1+2s)(1+20s) + 2K_1s(1+20s) - 5K_1K_2\left(s + \frac{1}{T_{i2}}\right)(1+2s)}
\end{aligned}$$

Systemets statiska förstärkning beräknas som

$$G_{cl}(0) = \frac{-\frac{5K_1K_2}{T_{i2}}}{-\frac{5K_1K_2}{T_{i2}}} = 1$$

Detta är som önskat, eftersom man vill ha $O_{sol} = R_{O_{sol}}$ i stationariteten.

c. För att störningen ska elimineras helt måste

$$P_2(s)FF(s) + D(s) = 0$$

vilket ger

$$FF(s) = -P_2^{-1}(s)D(s) = -\frac{1+20s}{5(1+4s)}e^{-4s}$$

Denna styrning är implementerbar eftersom dess överföringsfunktion är proper (d.v.s. täljaren har ej högre grad än nämnaren) och den har inga positiva tidsförskjutningar (d.v.s. regulatoren behöver inte kunna se in i framtiden utan bara betrakta tidigare värden).

d.

$$G(s) = \begin{bmatrix} P_3(s) & P_4(s) \\ P_2(s) & P_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{1+12s} & \frac{1}{1+8s} \\ \frac{5}{1+20s} & \frac{2}{1+2s} \end{bmatrix}$$

Särkopplingsmatrisen blir:

$$A(s) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{P_4}{P_3} \\ -\frac{P_2}{P_1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1+12s}{2(1+8s)} \\ -\frac{5(1+2s)}{2(1+20s)} & 1 \end{bmatrix}$$

Detta ger den sammanlagda överföringsfunktionen $T(s)$ som följer:

$$\begin{aligned}
T(s) &= G(s)A(s) = \begin{bmatrix} P_3 - P_4P_2/P_1 & 0 \\ 0 & P_1 - P_2P_4/P_3 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{1+12s} - \frac{5(1+2s)}{2(1+20s)(1+8s)} & 0 \\ 0 & \frac{2}{1+2s} - \frac{5(1+12s)}{2(1+20s)(1+8s)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$T(s)$ är ett diagonalt system, vilket innebär att särkopplingsmatrisen $A(s)$ uppfyller sitt syfte.

7 a. Derivatadeln ges av:

$$D(s) = -\frac{sKT_d}{(1 + sT_d/N)}Y(s)$$

Vilket skrivs om som:

$$D(s)(1 + sT_d/N) = -sKT_dY(s)$$

Invers Laplacetransform ger:

$$d(t) + \frac{T_d}{N} \frac{dd(t)}{dt} = -KT_d \frac{dy(t)}{dt}$$

Bakåtdiskretisering ger:

$$d(kh) + \frac{T_d}{N} \frac{d(kh) - d(kh - h)}{h} \approx -KT_d \frac{y(kh) - y(kh - h)}{h}$$

$$d(kh)(Nh + T_d) \approx T_d d(kh - h) - NKT_d(y(kh) - y(kh - h))$$

$$d(kh) \approx \frac{T_d d(kh - h) - NKT_d(y(kh) - y(kh - h))}{Nh + T_d}$$

Framåtdiskretisering ger:

$$d(kh) + \frac{T_d}{N} \frac{d(kh + h) - d(kh)}{h} \approx -KT_d \frac{y(kh + h) - y(kh)}{h}$$

$$d(kh + h)Td \approx d(kh)(T_d - Nh) - NKT_d(y(kh + h) - y(kh))$$

$$d(kh + h) \approx \frac{d(kh)(T_d - Nh) - NKT_d(y(kh + h) - y(kh))}{T_d}$$

b. Om filtret tas bort blir framåtdiskretiseringen som följer:

$$d(kh) \approx -KT_d \frac{y(kh + h) - y(kh)}{h}$$

För att realisera denna diskretisering krävs att vi känner till utsignalen vid tidpunkten $kh + h$ för att bestämma derivatadelens storlek vid tidpunkten kh , vilket är omöjligt. Bakåtdiskretisering ger dock följande resultat, vilket är möjligt att implementera i praktiken:

$$d(kh) \approx -KT_d \frac{y(kh) - y(kh - h)}{h}$$