

Lösningar till tentamen i Systemteknik/Processreglering 2011-08-22

1 a. Exempel på störningar är

- Uppvärmning genom solstrålning.
- Variationer i värmefflöde ut genom väggar på grund av ändrad utetemperatur.
- Värmefflöde genom fönster och dörrar som står öppna.
- Tända stearinljus och fullt med folk inomhus.

b. Mätsignalen av innetemperaturen kan återkopplas för att styra bränsleflödet. På så sätt kan vi kompensera för olika laststörningar som påverkar systemet. Då vi kan mäta utomhustemperaturen kan denna *framkopplas* för att snabbare kompensera för förändringar i ytttemperaturen, innan de hinner slå igenom i innetemperaturen.

2 a. Laplacetransformering ger

$$s^2y = -4sY - 3Y + 2U - sU$$

$$(s^2 + 4s + 3)Y = (2 - s)U$$

$$G(s) = \frac{2 - s}{s^2 + 4s + 3} = \frac{2 - s}{(s + 3)(s + 1)}$$

b. Systemet har poler i -3 och -1 samt ett nollställe i $+2$.

c. Båda polerna ligger i vänster halvplan, vilket medför stabilitet. Den statiska förstärkningen ges av

$$G(0) = \frac{2}{3}$$

3 a. PI-regulatorn överföringsfunktion: $G_r(s) = K \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right)$

Slutna systemet ges av

$$G_{cl}(s) = \frac{G_p(s)G_r(s)}{1 + G_p(s)G_r(s)} = \frac{\frac{2}{s+1} \frac{K(s+1/T_i)}{s}}{1 + \frac{2}{s+1} \frac{K(s+1/T_i)}{s}} = \frac{2K(s+1/T_i)}{s(s+1) + 2K(s+1/T_i)}$$

Jämförelse med det önskade karakteristiska polynomet ger

$$\begin{cases} 1 + 2K = 2\zeta\omega \\ 2K/T_i = \omega^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = \zeta\omega - \frac{1}{2} \\ T_i = \frac{2\zeta\omega - 1}{\omega^2} \end{cases}$$

b. ω är ett mått på slutna systemets (odämpade) snabbhet. ζ är ett mått på slutna systemets (relativa) dämpning.

c. Integratoruppvridning uppstår när styrsignalen mättar och I-delen fortsätter att växa. Den växande I-delen hjälper inte regleringen, utan ställer istället till problem när mätningen upphör. Det kan ta lång tid för I-delen att återhämta sig efter mätningen, vilket leder till dålig prestanda.

- 4 a. Överföringsfunktionen från v till y då $G_{ff} = 0$ ges av

$$G_{yv}(s) = \frac{1}{1 + G_p(s)} = \frac{1}{1 + \frac{2}{(s+1)(s+2)}e^{-0.1s}}$$

Det stationära reglerfelet ges av

$$e(\infty) = r(\infty) - y(\infty) = -y(\infty)$$

Vidare har vi $Y(s) = G_{yv}(s)V(s) = -G_{yv}(s)\frac{1}{s}$. Slutvärdesteoremet ger

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{yv}(s)\frac{1}{s} = G_{yv}(0) = \frac{1}{2}$$

Slutvärdet existerar eftersom $G_{yv}(s)$ enligt uppgiften är asymptotiskt stabil.

- b. Störningen skulle elimineras fullständigt om det var möjligt att välja

$$G_{ff}(s) = -\frac{1}{G_p(s)} = -\frac{(s+1)(s+2)}{2}e^{0.1s}$$

Detta G_{ff} skulle dock kräva två deriveringar av störningssignalen (ohållbart vid minsta brus) och en prediktion av signalen 0.1 sekunder framåt i tiden (omöjligt).

För att eliminera konstanta störningar räcker det med att implementera den statiska förstärkningen:

$$G_{ff}(s) = -\frac{1}{G_p(0)} = -1.$$

- 5 a. För en jämviktspunkt (M^0, V^0) ska gälla att alla tidsderivator är 0. Detta ger

$$\begin{cases} 0 = (-\alpha - \beta)V^0M^0 + (\varepsilon - \zeta)M^0 \\ 0 = (\beta - \delta)V^0M^0 - \gamma V^0 \end{cases}$$

Den första ekvationen ger $M^0 = 0$ eller $V^0 = \frac{\varepsilon - \zeta}{\alpha + \beta} = 10^2$. Den andra ekvationen ger $V^0 = 0$ eller $M^0 = \frac{\gamma}{\beta - \delta} = 5 \cdot 10^5$. Det finns alltså två jämviktspunkter och de är

$$(M^0, V^0) = (0, 0), \quad (M^0, V^0) = (5 \cdot 10^5, 10^2)$$

- b. Systemet kan skrivas på standardformen $\frac{dx}{dt} = f(x)$, där

$$x = \begin{pmatrix} M \\ V \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha VM - \beta VM + \varepsilon M - \zeta M \\ \beta VM - \gamma V - \delta VM \end{pmatrix}$$

Δx definieras enligt

$$\Delta x = \begin{pmatrix} M - M_0 \\ V - V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M - 5 \cdot 10^5 \\ V - 10^2 \end{pmatrix}$$

vilket gör att den linjäriserade modellen kan skrivas som

$$\frac{d\Delta x}{dt} = A|_{(M^0, V^0)} \Delta x$$

där

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial M} & \frac{\partial f_1}{\partial V} \\ \frac{\partial f_2}{\partial M} & \frac{\partial f_2}{\partial V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\alpha + \beta)V + \varepsilon - \zeta & -(\alpha + \beta)M \\ (\beta - \delta)V & (\beta - \delta)M - \gamma \end{pmatrix}$$

Insättning av den stationära punkten i det linjäriserade systemet ger

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 10^{-8} & 0 \end{pmatrix}$$

c. Systemets poler kan tas fram som egenvärdena till A:

$$\det(sI - A) = \det \begin{pmatrix} s & 0.5 \\ -10^{-8} & s \end{pmatrix} = s^2 + 5 \cdot 10^{-9} = 0$$

$$s = \pm i 7.07 \cdot 10^{-5}$$

Polerna ligger på den imaginära axeln (och är enkla). Det linjäriserade systemet är således stabilt men inte asymptotiskt stabilt.

6. Låt $G_p(s)$ beteckna processens överföringsfunktion.

- Nyquistkurvan börjar i $G_p(i0) = 1$, vilket också är processens statiska förstärkning.
- Det öppna systemets överföringsfunktion är $G_0(s) = KG_p(s)$ vid P-reglering. Man ser att Nyquistkurvan skär negativa reella axeln i ungefär -0.8 . Alltså är det återkopplade systemet stabilt då $K \cdot (-0.8) > -1$, d.v.s. $K < 1.25$.
- Man ser att då fasen är $-180^\circ + 45^\circ = -135^\circ$ är processens förstärkning ungefär 1.4. För att uppnå 45° fasmarginal ska förstärkningen för G_0 vara 1 vid denna frekvens. Alltså väljer vi K så att $K \cdot 1.4 = 1$, d.v.s. $K \approx 0.7$.

7 a. Framåtdifferens innebär approximationen

$$\frac{du(t)}{dt} \approx \frac{u(kh + h) - u(kh)}{h}$$

Vi får

$$\begin{aligned} \frac{u(kh + h) - u(kh)}{h} &= -2u(kh) + 5e(kh) \\ u(kh + h) - u(kh) &= -0.2u(kh) + 0.5e(kh) \\ u(kh + h) &= -0.8u(kh) + 0.5e(kh) \end{aligned}$$

b. Bakåtdifferens innebär approximationen

$$\frac{du(t)}{dt} \approx \frac{u(kh) - u(kh - h)}{h}$$

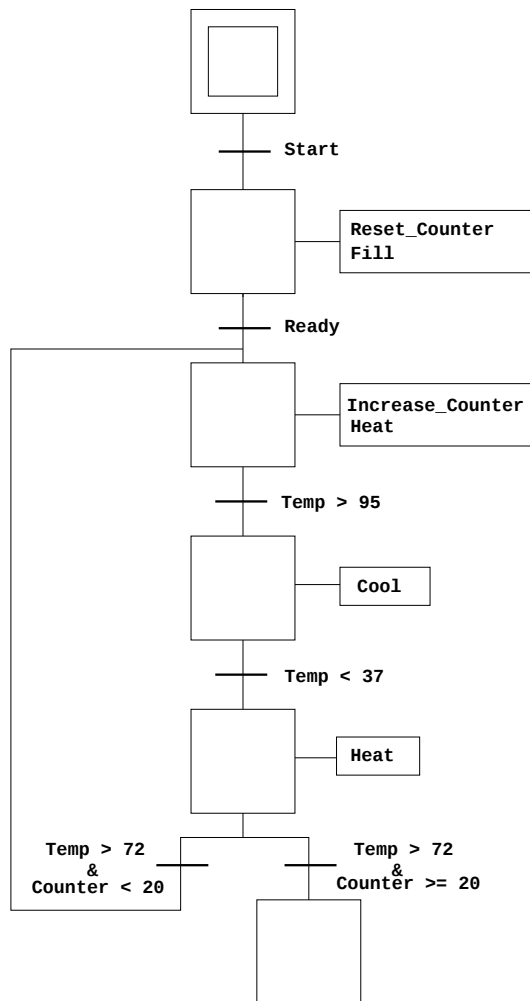
Vi får

$$\frac{u(kh) - u(kh - h)}{h} = -2u(kh) + 5e(kh)$$

$$u(kh) - u(kh - h) = -0.2u(kh) + 0.5e(kh)$$

$$u(kh) = \frac{1}{1.2}u(kh - h) + \frac{0.5}{1.2}e(kh)$$

8. En möjlig lösning ges nedan:



Anm. I verkligheten skall temperaturen hållas konstant vid 95°C, 37°C, och 72°C under en viss tid, vilket skulle ge en något mer komplicerad lösning.