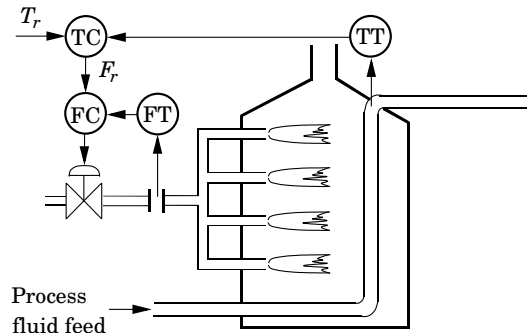


Lösningar till tentamen i Systemteknik 2011-05-27

1. Problemet kan avhjälpas med kaskadreglering enligt figuren nedan. Temperaturregulatorns styrsignal används som referensvärde till flödesregulatorn. Flödesregulatorn kan motverka störningar i bränsleflödet långt innan de får genomslag i vätsketemperaturen. Flödesregulatorn hjälper också till att linjärisera bränslematningens dynamik (inkl. ventilen).



2. Systemet kan skrivas på matrisform som

$$\dot{c} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_A c + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_B u$$

$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}_C x$$

Systemets överföringsfunktion ges av

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2 + 4s + 3}$$

Systemets poler är $p_{1,2} = (-1, -3)$. Systemet saknar nollställen.

- 3 a. Det typiska beteendet när K ökas är att regleringen blir snabbare men samtidigt mera svängig. Det motsvarar den streckade kurvan.

Ökat T_i motsvarar minskad integralverkan, vilket betyder att det tar längre tid att uppnå korrekt stationärt värde efter en referensändring eller en störning. Det motsvarar den prickade kurvan.

Ökat T_d innebär bättre stabilitetsmarginaler (upp till en gräns) och mindre svängningar. Den prick-streckade kurvan uppvisar mindre överslag vid börvärdesändringen än den ursprungliga kurvan. (Även uteslutningsmetoden godtas som motivering.)

- b. Att reglerfelet deriveras innebär att börvärdet deriveras. Det kan ställa till problem om börvärdet ändras i form av ett steg, eftersom derivatan av ett steg är oändlig. Berorande på tillämpning kan en sådan kraftig och snabb ändring av styrsignalen skada utrustningen. (Vad gäller den stabiliserande effekten behöver derivatan enbart verka på mätsignalen.)

4 a. Vi har systemet

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(40 - x_1) - 2x_1x_2 &&= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_1x_2 - 20x_2 &&= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

I en stationär punkt (x_1^0, x_2^0) gäller $f_1(x_1^0, x_2^0) = f_2(x_1^0, x_2^0) = 0$. Vi har

$$\begin{aligned}0 &= x_1^0(40 - x_1^0) - 2x_1^0x_2^0 \\ 0 &= x_1^0x_2^0 - 20x_2^0\end{aligned}$$

med lösningarna $(x_1^0, x_2^0) = (0, 0)$, $(x_1^0, x_2^0) = (40, 0)$ och $(x_1^0, x_2^0) = (20, 10)$.

b. Beräkna de partiella derivatorna:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 - 2x_1 - 2x_2 & -2x_1 \\ x_2 & x_1 - 20 \end{pmatrix}$$

Utvärdera i en stationär punkt, t.ex. $(x_1^0, x_2^0) = (20, 10)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_1^0, x_2^0) = \begin{pmatrix} -20 & -40 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Efter ett variabelbyte, $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_2^0$, får vi det linjära systemet

$$\Delta \dot{x} = \begin{pmatrix} -20 & -40 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \Delta x$$

5 a. Överföringsfunktionen för det slutna systemet (från r till y) ges av

$$G_{cl}(s) = \frac{G_p(s)G_r(s)}{1 + G_p(s)G_r(s)}$$

Med en PI-regulator

$$G_r(s) = K \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right) = \frac{K(s + 1/T_i)}{s}$$

fås

$$G_{cl}(s) = \frac{4K(s + 1/T_i)}{s(s + 0.2) + 4K(s + 1/T_i)}$$

Det faktiska karakteristiska polynomet $s^2 + (0.2 + 4K)s + 4K/T_i$ jämförs med det önskade karakteristiska polynomet $(s + 1)^2 = s^2 + 2s + 1$. Detta ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned}0.2 + 4K &= 2 &&\Rightarrow && K = 0.45 \\ 4K/T_i &= 1 &&\Rightarrow && T_i = 1.8\end{aligned}$$

- b. Eftersom regulatorn innehåller en integrator så är reglerfelet noll i jämvikt, oavsett vad börvärdet är.

Överföringsfunktionen från d till y ges av

$$G_{yd}(s) = \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)G_r(s)} = \frac{4s}{(s+1)^2}$$

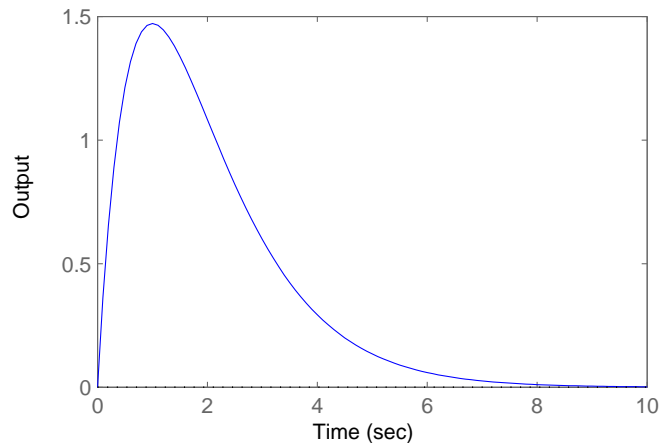
Med störningen $D(s) = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ fås utsignalen

$$Y(s) = G_{yd}(s)D(s) = \frac{4}{(s+1)^2}$$

Motsvarande tidsfunktion är

$$y(t) = 4te^{-t}$$

Dess plot visas nedan:



Avläsning i figuren eller en enkel räkning avslöjar att denna funktion når sitt maximum vid tiden $t = 1$. Utsignalens maximala avvikelse från börvärdet är $4e^{-1} \approx 1.47$.

6. Stegsvaret i A har ett utseende som är typiskt för ett stabilt första ordningens system. Systemets statiska förstärkning är 4 och systemet har nått 63 % av detta vid tiden 0.5 s, vilket alltså är tidskonstanten T . Detta ger överföringsfunktionen

$$G_A(s) = \frac{8}{s+2}$$

Stegsvaret i B beskriver en integrator, alltså ett första ordningens system med en pol i 0. Lutningen på linjen är 8, vilket ger att överföringsfunktionen är

$$G_B(s) = \frac{8}{s}$$

Stegsvaret i C visar svängningar, vilket antyder ett andra ordningens system vars poler har en imaginärdel skild från 0. Dessa svängningar avtar inte, vilket visar att systemet är odämpat ($\zeta = 0$). Svängningarna sker runt ett positivt värde, vilket innebär att systemets statiska förstärkning är positiv. Systemets överföringsfunktion kan alltså skrivas på formen

$$G_C(s) = \frac{a}{s^2 + \omega^2} \quad a, \omega > 0$$

Stegsvaret i D går först i negativ riktning. Detta innebär att systemet har ett nollställe i höger halvplan. Stegsvaret har dessutom ett svängigt men asymptotiskt stabilt beteende, vilket tyder på ett andra ordningens system med komplexa poler i vänster halvplan. Systemets överföringsfunktion kan alltså skrivas på formen

$$G_D(s) = \frac{a-s}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} \quad a, \zeta, \omega > 0$$

- 7 a. Fasen vid $\omega_c = 2$ rad/s avläses till -90° . Fasmarginalen är $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Påståendet är alltså FALSKT.
- b. Amplituden vid $\omega_0 = 8$ rad/s avläses till 0.2. Amplitudmarginalen är alltså $\frac{1}{0.2} = 5$. Det slutna systemet blir instabilt om förstärkningen i regulatorn är högre än så. Påståendet är alltså SANT.
- c. Vid $\omega = 10$ rad/s avläses amplituden till 0.1 och fasen till ca $-205^\circ = -3.6$ rad. Utsignalen blir då $0.1 \cdot 10 \sin(10t - 3.6)$. Påståendet är alltså SANT.
- d. Nyquistkurvan ritas $G(i\omega)$ då ω går från $\omega = 0$ till $\omega = \infty$. Amplituddiagrammet visar att förstärkningen går mot 0 då $\omega \rightarrow \infty$. Förstärkningen motsvarar avståndet från origo till Nyquistkurvan. Påståendet är alltså SANT.
8. De delar av GRAFCET-diagrammet som behöver ändras visas i figur 1. De konstruktioner som används är förgrening och synkronisering. Observera hur övergångar hanteras i de respektive fallen. De tomma stegen före synkroniseringens slut behövs för att vänta på den andra grenen ska bli klar.
- 9 a. Systemets statiska förstärkning är

$$G(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Relative Gain Array beräknas enligt

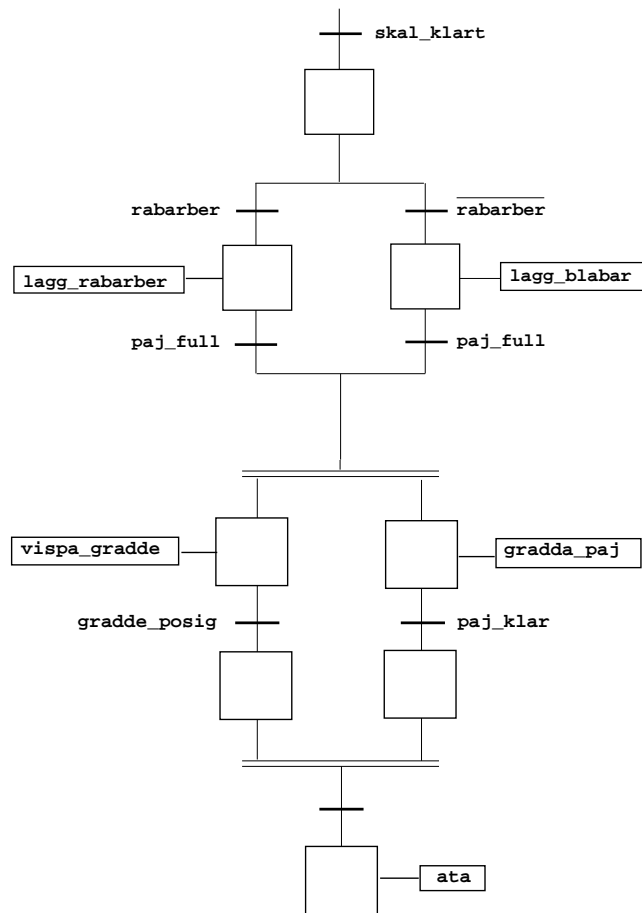
$$\begin{aligned} \text{RGA}(G) &= G(0) \times (G(0)^{-1})^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \right)^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diagonalelementen är närmast 1. Därför bör styrsignal u_1 användas för att styra y_1 och u_2 för att styra y_2 .

- b. Särkopplingsmatrisen blir

$$D(s) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}e^{-s} \\ -\frac{s+3}{(s+1)(s-3)}e^s & 1 \end{pmatrix}$$

Elementet D_{21} innehåller en negativ tidsfördröjning vilken är omöjlig att implementera. (Att D_{21} är instabil kan också ställa till problem, men det behöver inte kommenteras.)



Figur 1 GRAFCET-lösning till uppgift 6.