Lösningar

Andragradsekvationer

1. Lösningarna till ekvationen $x^2 + px + q = 0$, där p och q är konstanter, ges av formeln

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

I vårt fall har vi $p = -1$, $q = 4$, och får lösningarna

$$x_{1,2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 4} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{15}{4}} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{15}}{2} \approx 0.5 \pm 1.94i$$

2. För att kunna använda den allmänna formeln för att lösa andragradsekvationer delar vi först ekvationen med 3, och får

$$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 0$$

Med formeln i uppgift 3 ($p = 2/3$, $q = 1/3$) fås nu

$$x_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} \pm i\frac{\sqrt{2}}{3} \approx -0.33 \pm 0.47i$$

Partialbråksuppdelning

3. Antag att $f(x)$ kan skrivas på den givna formen,

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$$

Sätt nu de två termerna på gemensamt bråkstreck,

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} = \frac{a(x+2) + b(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x(a+b) + 2a + b}{(x+1)(x+2)}$$

För att detta ska stämma med den givna funktionen $f(x)$ måste det nu gälla att

$$a + b = 0$$
$$2a + b = 1$$

Genom att lösa ekvationssystemet fås $a = 1$ och $b = -1$, och det gäller att

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

4. På samma sätt som i den förra uppgiften får vi

$$
\begin{aligned}
f(x) = \frac{3x+11}{(x+1)(x-3)(x+2)} &= \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{x+2} \\
&= \frac{a(x-3)(x+2) + b(x+1)(x+2) + c(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-3)(x+2)} \\
&= \frac{x^2(a+b+c) + x(-a+3b-2c) - 6a + 2b - 3c}{(x+1)(x-3)(x+2)}
\end{aligned}
$$

Vi kan nu lösa ekvationssystemet

$$
\begin{aligned}
a + b + c &= 0 \\
-a + 3b - 2c &= 3 \\
-6a + 2b - 3c &= 11
\end{aligned}
$$

Genom att t.ex. använda miniräknare eller göra variabelsubstitution för hand kan vi hitta lösningen som $a = -2$, $b = 1$, $c = 1$. Det gäller då att

$$
f(x) = \frac{3+11x}{(x+1)(x-3)(x+2)} = -\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+2}
$$

5. Beräkna först rötterna till nämnarpolynomet

$$
x^2 + 3x + 2 = 0 \implies x_1 = -1, \quad x_2 = -2
$$

Vi kan nu skriva $f(x)$ som

$$
f(x) = \frac{2}{x^2+3x+2} = \frac{2}{(x+1)(x+2)}
$$

På samma sätt som i tidigare uppgifter får vi nu

$$
\begin{aligned}
f(x) = \frac{2}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} &= \frac{a(x+2) + b(x+1)}{(x+1)(x+2)} \\
&= \frac{x(a+b) + 2a + b}{(x+1)(x+2)}
\end{aligned}
$$

Vi kan nu lösa ekvationssystemet

$$
\begin{aligned}
a + b &= 0 \\
2a + b &= 2
\end{aligned}
$$

och får $a = 2$, $b = -2$. Det gäller alltså att

$$
f(x) = \frac{2}{x^2+3x+2} = \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x+2}
$$

Matriser

6 a.

$$
A \cdot B = \begin{pmatrix} -1\cdot 1 + 0 \cdot 4 & -1 \cdot -2 + 0 \cdot -5 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 & 3 \cdot -2 + 2 \cdot -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 11 & -16 \end{pmatrix}
$$

b.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 & -1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

c.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 \cdot 4 + 0 \cdot -5 \end{pmatrix} = -4$$

7.

$$\det(A) = -2 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = -4$$

Formeln för att beräkna determinanten för en 2×2-matris finns i formelsamlingen.

8.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Formeln för att beräkna inversen till en 2×2-matris finns i formelsamlingen.

9 a. Egenvärdena λ till en matris A ges av ekvationen (som står angiven i formelsamlingen)

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Här får vi

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 4 \end{pmatrix}\right)$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda - 4) - (-2) \cdot (-3) = \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$$

Genom att lösa andragradsekvationen får vi

$$\lambda = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2} \implies \lambda_1 = -0.37,\ \lambda_2 = 5.37$$

b. Här är A en diagonal matris och egenvärdena är därmed desamma som diagonalelementen, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -2$.

10a. Ekvationssystemet kan skrivas som

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vilket är detsamma som

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b. Ekvationssystemet kan skrivas som

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Taylorserieutveckling

11a. En funktion $f(x)$ kan utvecklas i en Taylorserie kring punkten a, dvs skrivas som

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}\frac{df}{dx}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}(x-a)^2 + \dots$$

Vi kan sedan få en approximation av funktionen $f(x)$ som stämmer bra kring $x = a$ genom att bara räkna med några av de första termerna i den oändliga Taylorserien.

I vår uppgift vill vi utveckla $f(x)$ till första ordningens termer, dvs de första två termerna i Taylorserien. Vi vill utveckla $f(x)$ kring punkten $x = 2$, dvs $a = 2$.

Vi får då

$$f(x) \approx f(2) + \frac{df}{dx}(2)(x-2)$$

Vi har

$$f(2) = 4, \quad \frac{df}{dx} = 2x, \quad \frac{df}{dx}(2) = 4$$

och får

$$f(x) \approx 4 + 4(x-2) = 4(x-1)$$

b. Här är $f(x,u)$ en funktion av två variabler och Taylorserieutvecklingen i punkten $x = a$, $u = b$ ges av

$$f(x,u) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial u}(a,b)(u-b) +$$
$$+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}(a,b)(x-a)(u-b) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(a,b)(u-b)^2 + \dots$$

Då vi ska räkna upp till första ordningens termer tar vi med den konstanta termen $f(a,b)$ samt de termer som innehåller förstaderivator av $f(x,u)$.

Vi får då

$$f(x,u) \approx f(3,\pi) + \frac{\partial f}{\partial x}(3,\pi)(x-3) + \frac{\partial f}{\partial u}(3,\pi)(u-\pi)$$

Vi har

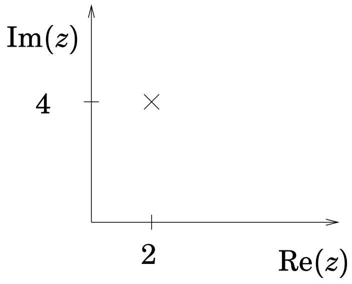
$$f(3,\pi) = 15 - 0 = 15, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 5\sqrt{3}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{x}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(3,\pi) = \frac{5}{2} = 2.5,$$
$$\frac{\partial f}{\partial u} = \cos(u) \quad \frac{\partial f}{\partial u}(3,\pi) = -1$$

och får då

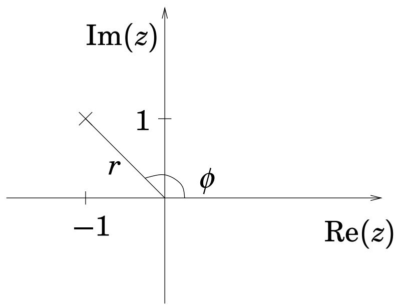
$$f(x,u) \approx 15 + 2.5(x-3) - 1(u-\pi) \approx 10.64 - 2.5x - u$$

Komplexa tal

12a. $\mathrm{Re}(z) = -2$, $\mathrm{Im}(z) = 3$. Observera att imaginärdelen *inte* är $3i$.



Figur 1



Figur 2

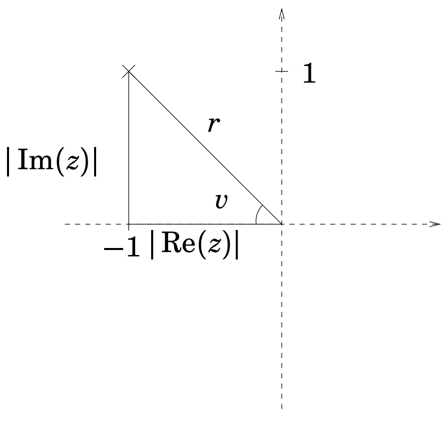
b. Se figur 1.

c. Se figur 2. Absolutbeloppet $|z| = r$ är avståndet till origo, argumentet $\arg(z) = \phi$ är vinkeln till positiva reella axeln.

d. *Absolutbeloppet* $|z|$: Vi kan se från figur 2 att absolutbeloppet $|z|$ är hypotenusan i en rätvinklig triangel där de båda övriga sidorna har längderna $|\operatorname{Re}(z)|$ och $|\operatorname{Im}(z)|$, se figur 3. Från Pythagoras sats kan vi nu beräkna $|z|$ som

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2}$$

Denna formel gäller för att beräkna absolutbeloppet för alla komplexa tal z. I vårt fall har vi $\operatorname{Re}(z) = -1$ och $\operatorname{Im}(z) = 1$ och får $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.



Figur 3

Argumentet $\arg(z)$: Vi beräknar här argumentet i radianer. Vinkeln ϕ i figur 2 kan beräknas som $\phi = \pi - v$ där v är vinkeln i triangeln i figur 3. Vi kan nu använda att

$$\tan(v) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|\,\mathrm{Re}(z)|} \implies v = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{|\,\mathrm{Re}(z)|}\right)$$

Vi får $v = \arctan(1/1) = \arctan 1 = \pi/4$, och således $\phi = \pi - v = \pi - \pi/4 = 3\pi/4$.

e. Ett tal z skrivs på polär form som $z = |z|e^{\arg(z)i}$. Från d-uppgiften vet vi att $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = 3\pi/4$, så det gäller att $z = -1 + i = \sqrt{2}e^{3\pi i/4}$.

f. Vi kan skriva z som

$$z = 3e^{\pi i} = 3(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = 3(-1 + i \cdot 0) = -3$$

Vi ser nu att $\mathrm{Re}(z) = -3$, $\mathrm{Im}(z) = 0$.

13a.

$$|e^{\omega i}| = |\cos(\omega) + i\sin(\omega)| = \sqrt{\cos^2(\omega) + \sin^2(\omega)} = \sqrt{1} = 1$$

Detta resultat är bra att lära sig utantill.

b. Talet $e^{\omega i}$ är ett komplext tal med absolutbeloppet 1 och argumentet ω, skrivet på polär form. Därmed gäller det att

$$\arg(e^{\omega i}) = \omega$$

Även detta resultat är bra att lära sig utantill.

c.

$$|-2(-1+2i)(-4-3i)| = |-2| \cdot |-1+2i| \cdot |-4-3i| =$$
$$2 \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 2\sqrt{5}\sqrt{25} = 10\sqrt{5} \approx 22.36$$

d. För argument gäller samma räkneregler som för logaritmer, t.ex.

$$\arg(xy^2/z) = \arg(x) + 2\arg(y) - \arg(z)$$

Vi får då

$$\arg(-2(-1+2i)(-4-3i)) = \arg(-2) + \arg(-1+2i) + \arg(-4-3i) =$$
$$\pi + (\pi + \arctan(2/-1)) + (\pi + \arctan(-3/-4)) =$$
$$3\pi + \arctan(-2) + \arctan(3/4) \approx 8.96$$

e.

$$\left|\frac{2e^{-5i}(2-i)^2}{2i+3}\right| = \frac{2|e^{-5i}||2-i|^2}{|2i+3|} = \frac{2 \cdot 1(2^2 + (-1)^2)}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{10}{\sqrt{13}} \approx 2.77$$

f.

$$\arg\left(\frac{2e^{-5i}(2-i)^2}{2i+3}\right) = \arg(2) + \arg(e^{-5i}) + 2\arg(2-i) - \arg(2i+3) =$$
$$0 + (-5) + 2\arctan(-1/2) - \arctan(2/3) \approx -3.51$$