

Processreglering – FY

Flervariabel reglering

- ▶ Flera in- och utsignaler
- ▶ Stabilitet och interaktion
- ▶ Para ihop in- och utsignaler (RGA)
- ▶ Eliminera interaktion (särskoppling)
- ▶ Modellprediktiv reglering (MPC)

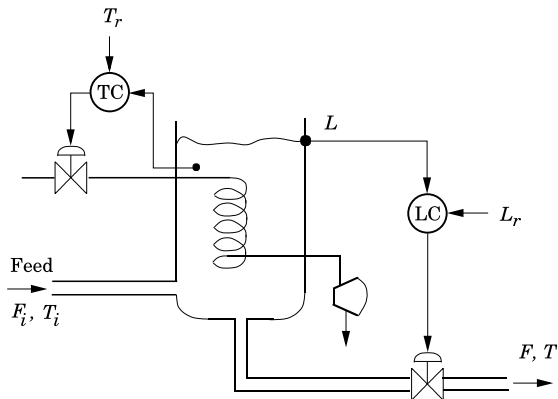
Läsanvisning: *Process Control*: 11.1–11.4

Exempel 1: Flöde och temperatur i dusch



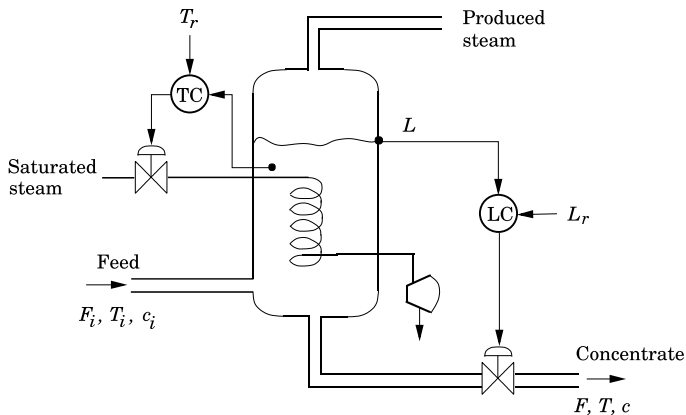
- ▶ Styrsignaler: kallvattenflöde, varmvattenflöde
- ▶ Mätsignaler: totalt vattenflöde, temperatur
- ▶ Båda styrsignalerna påverkar båda mätsignalerna

Exempel 2: Nivå och temperatur i tank



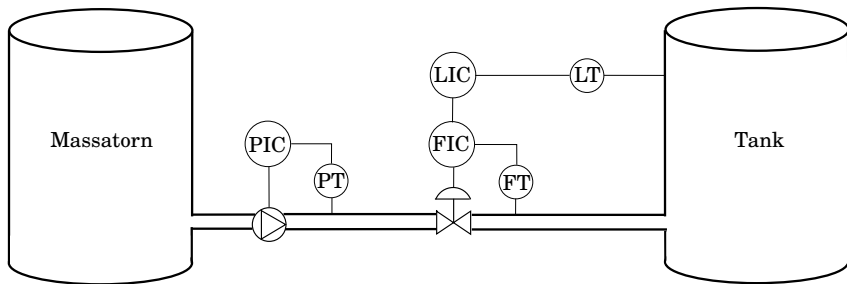
- Nivåregleringen påverkar temperaturen
- Temperaturregleringen påverkar inte nivån

Exempel 3: Nivå och temperatur i indunstare



- Nivåregleringen påverkar temperaturen
- Temperaturregleringen påverkar nivån

Exempel 4: Tryck och flöde i transportrör



Trycket i röret ska hållas konstant, medan det önskade flödet bestäms av tankens nivåregulator

- ▶ Tryckregleringen påverkar flödet
- ▶ Flödesregleringen påverkar trycket

Flervariabla systembeskrivningar

Tillståndsbeskrivning:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

där u och y är kolonnvektorer

Överföringsmatris, t.ex.:

$$Y(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} U(s) = G(s)U(s)$$

Samband: $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

Flervariabla systembeskrivningar

Exempel: Duschen

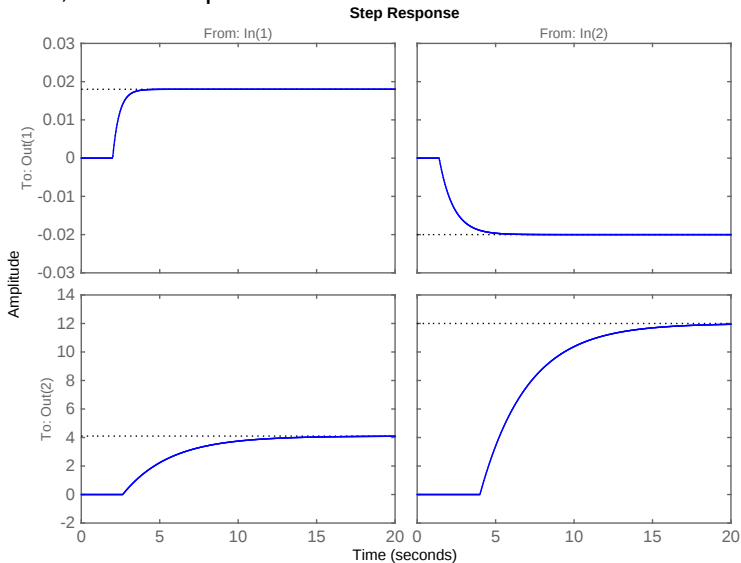
$$\begin{bmatrix} y_{\text{flow}} \\ y_{\text{temp}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -e^{-s} & e^{-s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\text{cold}} \\ u_{\text{hot}} \end{bmatrix}$$

Exempel: Transportröret

$$\begin{bmatrix} y_{\text{pres}} \\ y_{\text{flow}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.018e^{-2s}}{0.42s + 1} & \frac{-0.02e^{-1.4s}}{0.9s + 1} \\ \frac{4.1e^{-2.64s}}{3s + 1} & \frac{12e^{-4s}}{3s + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\text{pump}} \\ u_{\text{valve}} \end{bmatrix}$$

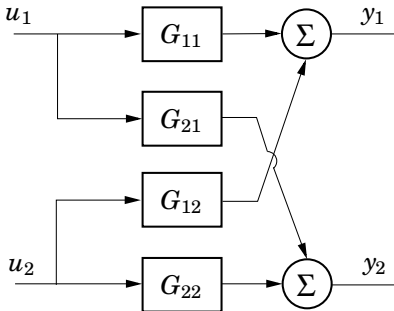
Flervariabla systembeskrivningar

Stegsvar, t.ex. transportröret:



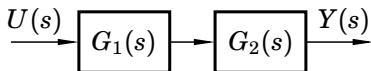
Flervariabla systembeskrivningar

Blockdiagram, t.ex.:



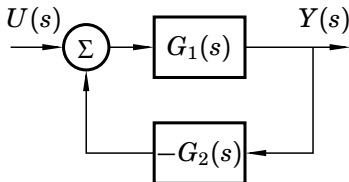
Blockdiagramräkning för flervariabla system

Seriekoppling:



$$Y(s) = G_2(s)G_1(s)U(s)$$

Återkoppling:



$$Y(s) = G_1(s)(U(s) - G_2(s)Y(s))$$

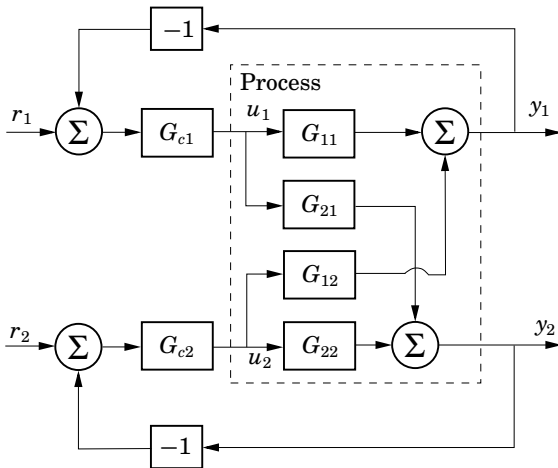
$$(I + G_1(s)G_2(s))Y(s) = G_1(s)U(s)$$

$$Y(s) = (I + G_1(s)G_2(s))^{-1}G_1(s)U(s)$$

Stabilitet för flervariabla system

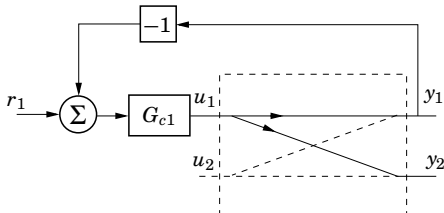
Varje krets, sluten för sig, kan vara stabil, men systemet kan ändå bli instabilt när flera kretsar sluts samtidigt!

Exempel:



Stabilitet för flervariabla system

Endast första kretsen sluten:



Utsignalernas beroende av insignalen r_1 :

$$Y_1 = \frac{G_{11}G_{c1}}{1 + G_{11}G_{c1}}R_1$$

$$Y_2 = G_{21}U_1 = \frac{G_{21}G_{c1}}{1 + G_{11}G_{c1}}R_1$$

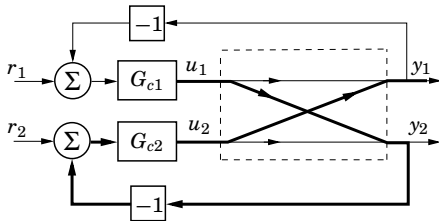
Stabiliteten bestäms av den karakteristiska ekvationen

$$1 + G_{11}G_{c1} = 0$$

(Motsvarande samband för andra kretsen)

Stabilitet för flervariabla system

Båda kretsarna slutna samtidigt:



Utsignalernas beroende av insignalerna r_1 och r_2 :

$$Y_1 = \frac{G_{11}G_{c1} + G_{c1}G_{c2}(G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})}{A}R_1 + \frac{G_{12}G_{c2}}{A}R_2$$

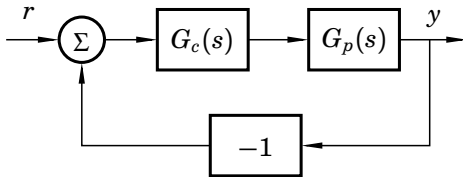
$$Y_2 = \frac{G_{21}G_{c1}}{A}R_1 + \frac{G_{22}G_{c2} + G_{c1}G_{c2}(G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})}{A}R_2$$

Stabiliteten bestäms av den karakteristiska ekvationen

$$A(s) = (1 + G_{11}G_{c1})(1 + G_{22}G_{c2}) - \underline{G_{12}G_{21}G_{c1}G_{c2}} = 0$$

Flervariabel stabilitet – allmänna fallet

Flervariabel process $G_p(s)$ och flervariabel regulator $G_c(s)$:



$$Y(s) = (I + G_p(s)G_c(s))^{-1} G_p(s)G_c(s)R(s)$$

Karakteristisk ekvation:

$$A(s) = \det(I + G_p(s)G_c(s)) = 0$$

Slutna systemet as. stabilt $\Leftrightarrow$ alla rötter i vänster halvplan

Flervariabel stabilitet – exempel

$$G_p(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{0.1s+1} & \frac{5}{s+1} \\ \frac{1}{0.5s+1} & \frac{2}{0.4s+1} \end{pmatrix}, \quad G_r(s) = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix}$$

Varje loop sluten för sig är stabil för alla $K_1, K_2 > 0$

$$\det(I + G_p(s)G_r(s)) = \det \begin{pmatrix} \frac{K_1}{0.1s+1} + 1 & \frac{5K_2}{s+1} \\ \frac{K_1}{0.5s+1} & \frac{2K_2}{0.4s+1} + 1 \end{pmatrix} = \frac{a(b)}{b(s)}$$

där

$$\begin{aligned} a(s) = & 0.02s^4 + 0.1(3.1 + 2K_1 + K_2)s^3 \\ & + (1.29 + 1.1K_1 + 1.3K_2 + 0.8K_1K_2)s^2 \\ & + (2 + 1.9K_1 + 3.2K_2 + 0.5K_1K_2)s \\ & + (1 + K_1 + 2K_2 - 3K_1K_2) = 0 \end{aligned}$$

Sista koefficienten negativ om $3K_1K_2 > 1 + K_1 + K_2 \Rightarrow$ instabilt

Relative Gain Array (RGA)

- ▶ Ett sätt att konstatera koppling i "kvadratiska" system (lika många insignaler som utsignaler)
- ▶ Ofta baserat på den statiska förstärkningen $K = G(0)$
- ▶ Normalisering för att undvika skalningsproblem
- ▶ Vägledning för ihopparning av in- och utsignaler

Relativ förstärkning

1. Öppna systemets statiska förstärkning då $\Delta u_k = 0$, $k \neq j$

$$k_{ij} = G_{ij}(0) = \frac{\Delta y_i}{\Delta u_j}$$

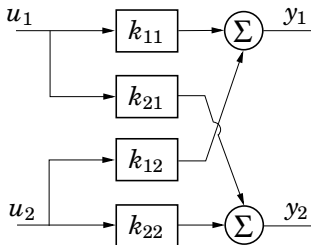
2. Slutna systemets statiska förstärkning då $\Delta y_k = 0$, $k \neq i$
(antag "perfekt" reglering av de andra utsignalerna)

$$l_{ij} = \frac{\Delta y_i}{\Delta u_j}$$

3. Relativa förstärkningen

$$\lambda_{ij} = \frac{k_{ij}}{l_{ij}}$$

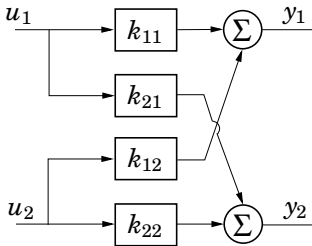
RGA för 2×2 -system



Öppna systemets förstärkning från u_1 till y_1 :

$$y_1 = k_{11}u_1$$

RGA för 2×2 -system



Slutna systemets förstärkning från u_1 till y_1 då alla utsignaler regleras till noll utom y_1 :

$$y_2 = k_{21}u_1 + k_{22}u_2 = 0 \quad (\text{perfekt reglering})$$

$$u_2 = -\frac{k_{21}}{k_{22}}u_1$$

$$y_1 = \underbrace{\left(k_{11} - \frac{k_{12}k_{21}}{k_{22}}\right)}_{=l_{11}} u_1$$

RGÄ för 2×2 -system

Relativ förstärkning:

$$\lambda_{11} = \frac{k_{11}}{l_{11}} = \frac{k_{11}}{k_{11} - \frac{k_{12}k_{21}}{k_{22}}}$$

Notera att $l_{11} = \frac{\det K}{k_{22}}$

Man kan visa att matrisen med elementen $1/l_{ij}$ ges av

$$\frac{1}{\det K} \begin{bmatrix} k_{22} & -k_{21} \\ -k_{12} & k_{11} \end{bmatrix} = \left(K^{-1}\right)^T$$

RGA för allmänt kvadratisk system

RGA-matrisen Λ med elementen $\lambda_{ij} = k_{ij} \frac{1}{l_{ij}}$, kan beräknas enligt

$$\Lambda = K .* (K^{-1})^T$$

OBS! ".*" är elementvis multiplikation

För Λ gäller

- ▶ Rad- och kolonnsumma

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{ij} = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} = 1$$

- ▶ Systemet lätt att reglera om Λ är (nära) enhetsmatris (efter eventuella permutationer)
- ▶ Negativa element svarar mot besvärlig koppling

Ihopparning av in- och utsignaler

Tumregel: In- och utsignaler ska paras så att motsvarande relativa förstärkning är positiv och så nära ett som möjligt.

Exempel 1:

Λ	Parning	Interaktion
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$u_1 - y_1$ $u_2 - y_2$	Ingen
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$u_1 - y_2$ $u_2 - y_1$	Ingen
$\begin{bmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.15 & 0.85 \end{bmatrix}$	$u_1 - y_1$ $u_2 - y_2$	Svag
$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$	$u_1 - y_1$ $u_2 - y_2$	Svår

Ihopparning av in- och utsignaler

Exempel 2: 3×3 -system

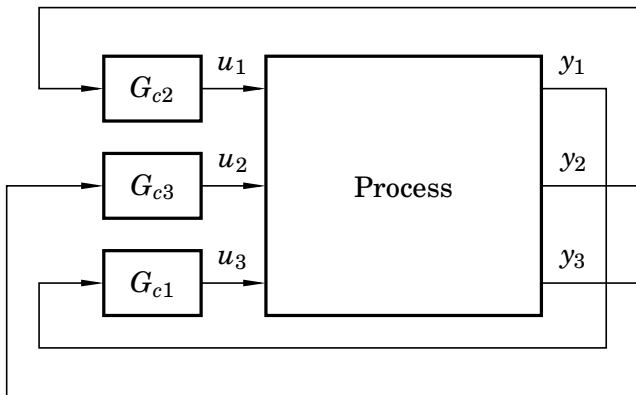
$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{2}{s+3} & \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+2} \end{pmatrix}$$

RGA-beräkning:

$$G(0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

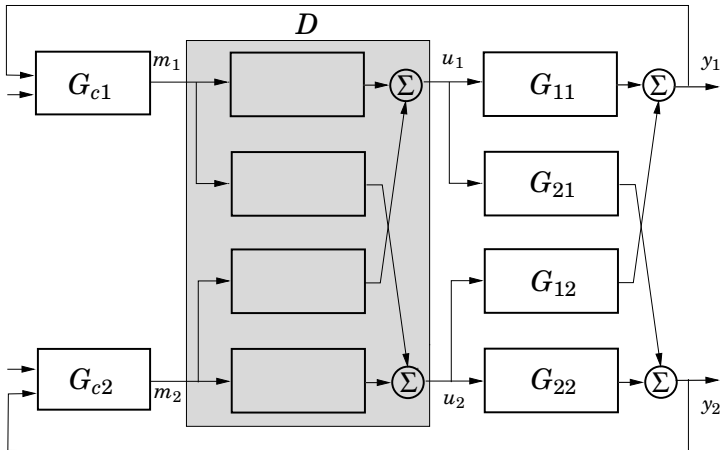
Svår multivariabel interaktion

Kopplingsförslag: $u_1 - y_2$, $u_2 - y_3$, $u_3 - y_1$



Särkoppling

Idé: Inför nya styrsignaler m och ett särkopplingsfilter $D(s)$ så att systemet blir lättare att styra



Särkoppling

Utsignaler som funktion av de nya insignalerna:

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)D(s)M(s) = T(s)M(s)$$

där $T(s)$ väljs med önskade egenskaper

- ▶ Särkopplingsfilter: $D(s) = G(s)^{-1}T(s)$
- ▶ Välj $T(s)$ diagonal
- ▶ 2×2 -fallet:

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}, \quad D(s) = \frac{1}{\det G} \begin{bmatrix} G_{22}T_{11} & -G_{12}T_{22} \\ -G_{21}T_{11} & G_{11}T_{22} \end{bmatrix}$$

Utformning av särkopplingen

Ett val av särkoppling är följande:

$$D(s) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{G_{12}}{G_{11}} \\ -\frac{G_{21}}{G_{22}} & 1 \end{bmatrix}$$

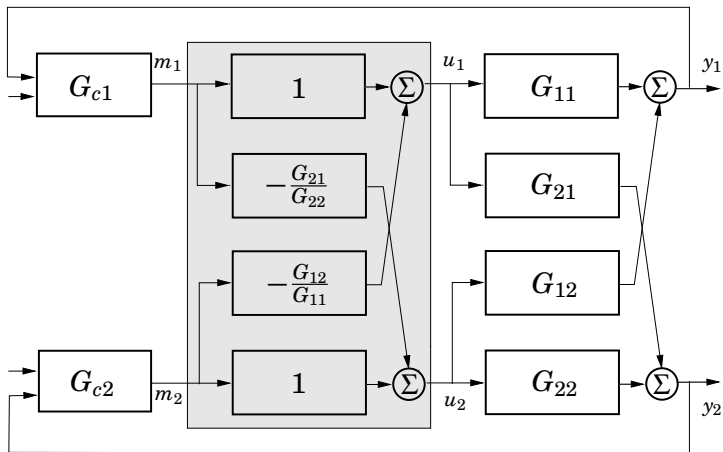
(andra val av D ligger utanför kursen)

Detta val resulterar i följande särkopplade system:

$$T(s) = \begin{bmatrix} G_{11} - G_{12} \frac{G_{21}}{G_{22}} & 0 \\ 0 & G_{22} - G_{21} \frac{G_{12}}{G_{11}} \end{bmatrix}$$

Detta system kan nu regleras med två vanliga regulatorer

Tolkning som två framkopplingar:



Implementering av särkopplingen

Särkopplingselementen $-\frac{G_{12}}{G_{11}}$ och $-\frac{G_{21}}{G_{22}}$ kan inte implementeras om de innehåller

- ▶ rena derivator
- ▶ negativa tidsfördröjningar

Några lösningsalternativ:

- ▶ lågpasfiltrera
- ▶ använd bara den statiska förstärkningen

Exempel: Transportröret

Process:

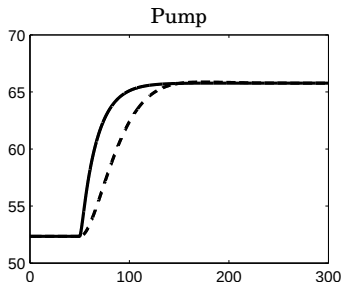
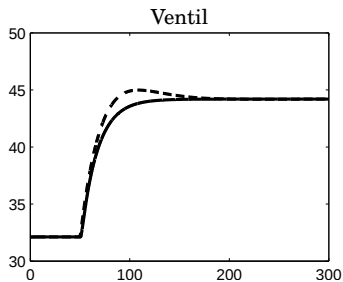
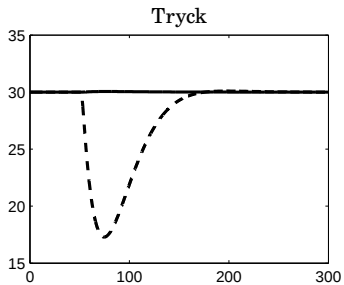
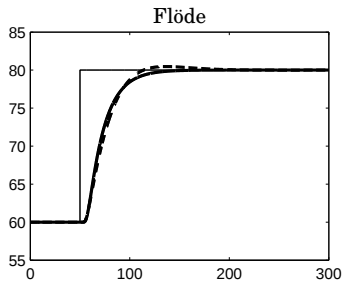
$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.018e^{-2s}}{0.42s + 1} & \frac{-0.02e^{-1.4s}}{0.9s + 1} \\ \frac{4.1e^{-2.64s}}{3s + 1} & \frac{12e^{-4s}}{3s + 1} \end{bmatrix}$$

RGA:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0.73 & 0.27 \\ 0.27 & 0.73 \end{bmatrix}$$

Slutsats: reglera trycket med pumpen och reglera flödet med ventilen, viss interaktion mellan looparna

Simulering med särkoppling (heldragen) och utan (streckad):



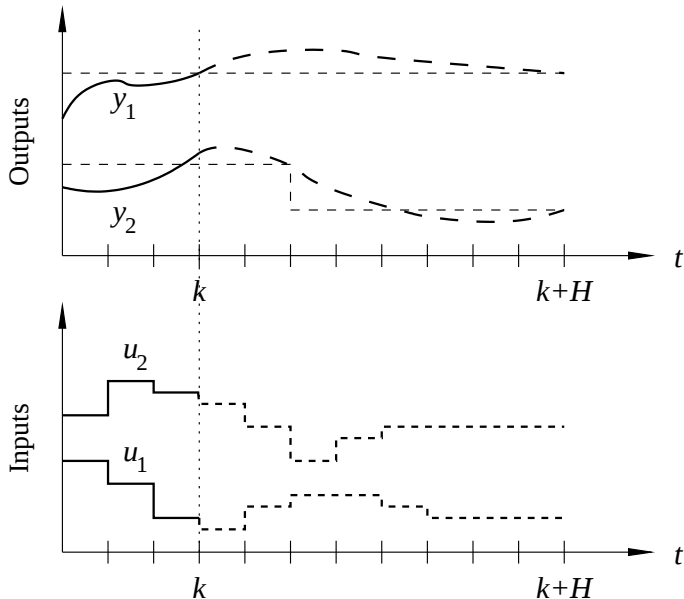
Modellprediktiv reglering (MPC)

Avancerad metod för reglering av flervariabla processer

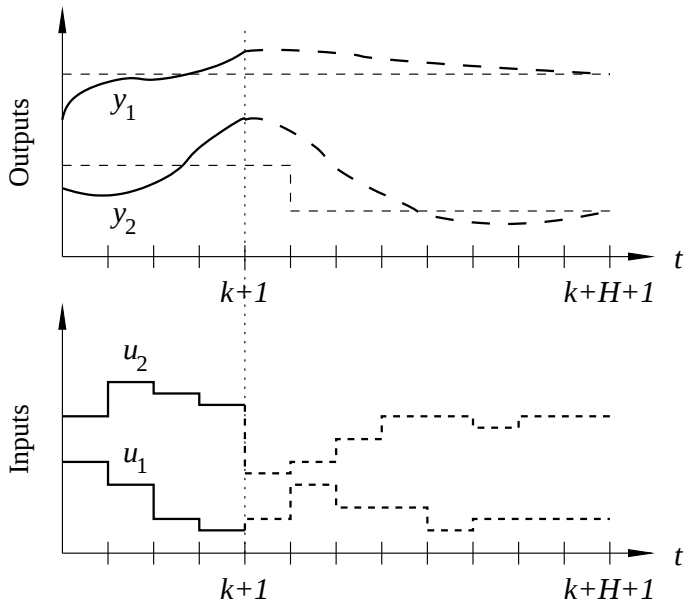
Bygger på

- ▶ Flervariabel processmodell – linjär eller olinjär
- ▶ Optimeringskriterium, inklusive ev. bivillkor på styrsignaler och tillståndsvariabler
- ▶ Online-lösning av optimeringsproblem i varje sampel
 - ▶ Ger optimala trajektorier för styrsignalerna
 - ▶ Använd bara första värdet i lösningen
 - ▶ Upprepa optimeringen i nästa tidssteg (fjärmande horisont)

Optimering över fjärmande horisont



Optimering över fjärmande horisont



Exempel på optimeringsproblem

Linjär modell:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

Kvadratisk kostnadsfunktion:

$$J = \sum_{t=k+1}^{k+H} \left(w_1(r_1 - y_1)^2 + w_2(r_2 - y_2)^2 \right) + \sum_{t=k}^{k+H-1} \left(\rho_1 \Delta u_1^2 + \rho_2 \Delta u_2^2 \right)$$

Optimeringsproblem: Minimera J med avseende på u_1, u_2 , med hänsyn till begränsningar

$$u_{i_{\min}} \leq u_i \leq u_{i_{\max}}$$

Flervariabel reglering – sammanfattning

- ▶ Enkelriktad påverkan från en reglerkrets till en annan påverkar inte stabiliteten och kan motverkas med framkoppling
- ▶ Flervariabel interaktion kan påverka både stabiliteten och prestandan negativt. Interaktionen kan minskas med ett särkopplingsfilter
- ▶ Analysverktyget RGA beskriver hur svår interaktionen är och vilka utsignaler som bör återkopplas till vilka insignaler
- ▶ Vid svår interaktion eller höga prestandakrav kan en avancerad flervariabel regulator användas, t.ex. MPC