

# Systemteknik/Processreglering F9

---

## PID-regulatorn

- ▶ Algoritmen
- ▶ Frekvensanalys
- ▶ Praktiska modifieringar
- ▶ Inställningsmetoder

Läsanvisning: *Process Control*: 8.1–8.6

# PID-regulatorn

---

“Based on a survey of over eleven thousand controllers in the refining, chemicals and pulp and paper industries, 97% of regulatory controllers utilize PID feedback.”

[Desborough and Miller, 2002]

”Läroboksformen”:

$$u(t) = K \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

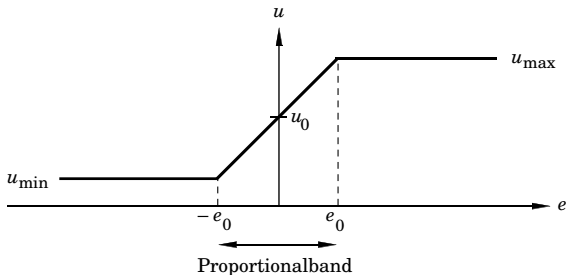
Överföringsfunktion:

$$G_c(s) = K \left( 1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right)$$

# P-delen

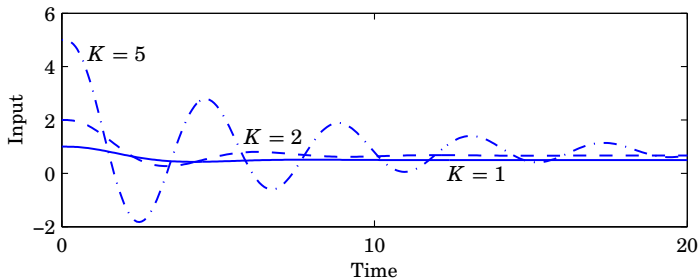
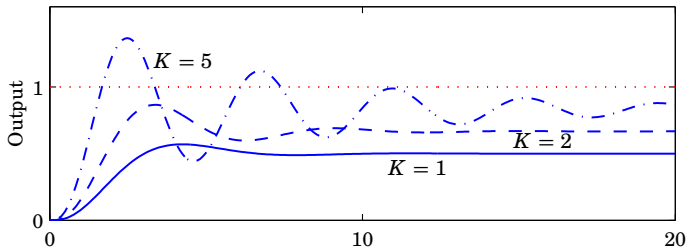
P-regulator:

$$u = K(r - y) + u_0 = Ke + u_0$$



- $u_0$  kan ställas in så att stationära felet blir noll vid den önskade jämviktspunkten (nollställning, *reset*)

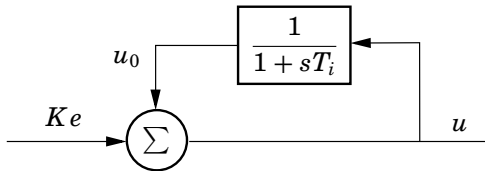
## Exempel: P-reglering av $G_p(s) = (s + 1)^{-3}$



# I-delen

---

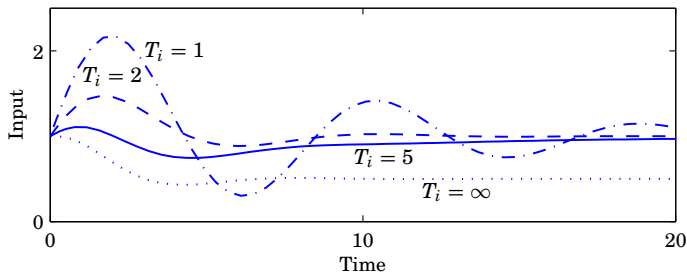
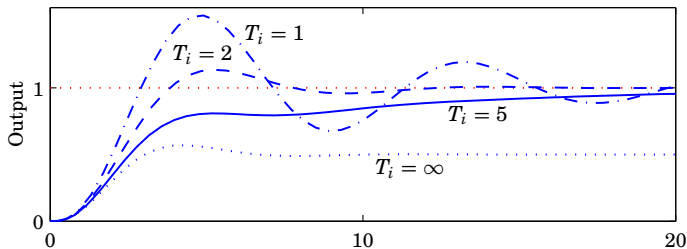
Inför automatisk inställning av  $u_0$  (*automatic reset*):



$$U(s) = KE(s) + \frac{1}{1 + sT_i} U(s)$$

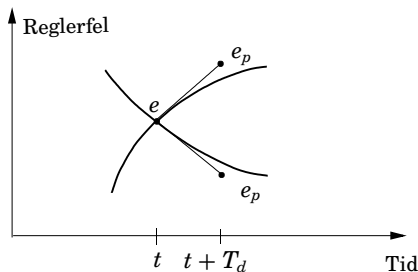
$$U(s) = K \left( 1 + \frac{1}{sT_i} \right) E(s)$$

## Exempel: PI-reglering av $G_p(s) = (s + 1)^{-3}$ ( $K = 1$ )



## D-delen

En P-regulator ger samma styrsignal i båda fallen nedan:



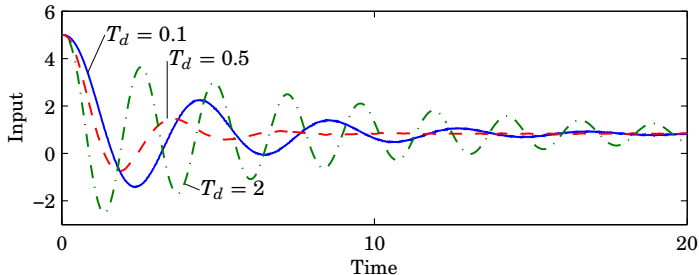
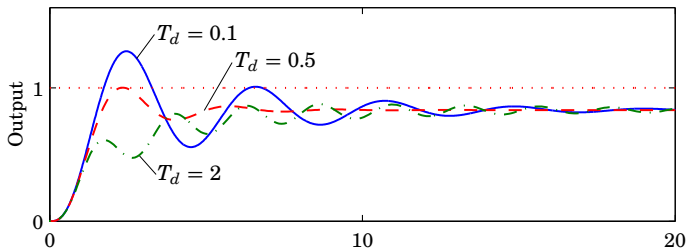
Predikterat fel:

$$e_p(t + T_d) \approx e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt}$$

PD-regulator:

$$u(t) = K \left( e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

## Exempel: PD-reglering av $G_p(s) = (s + 1)^{-3}$ ( $K = 5$ )

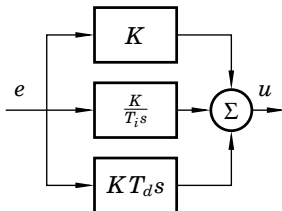


## Parallell- och serieformen

---

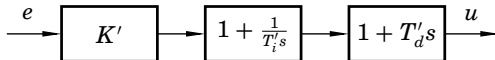
PID-regulator på standardform (parallellform):

$$G_c(s) = K + \frac{K}{sT_i} + sKT_d$$



PID-regulator på serieform (vanlig i industrin):

$$G'_c(s) = K' \left(1 + \frac{1}{sT'_i}\right) (1 + sT'_d)$$



# Parallell- och serieformen

---

Omvandling parallellform  $\leftrightarrow$  serieform:

$$K = K' \frac{T_i' + T_d'}{T_i'} \qquad K' = \frac{K}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4T_d}{T_i}} \right)$$

$$T_i = T_i' + T_d' \qquad T_i' = \frac{T_i}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4T_d}{T_i}} \right)$$

$$T_d = \frac{T_i' T_d'}{T_i' + T_d'} \qquad T_d' = \frac{T_i}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4T_d}{T_i}} \right)$$

- ▶ Parametrarna identiska för PI- och PD-regulatorn
- ▶ Omvandling parallellform  $\rightarrow$  serieform bara möjlig om  $T_i \geq 4T_d$ 
  - ▶ Parallellformen mer generell

# Frekvensanalys av PID-regulatorn

---

Frekvensfunktion för PID-regulatorn på serieform:

$$G'_c(i\omega) = \frac{K'}{i\omega T'_i}(1 + i\omega T'_i)(1 + i\omega T'_d)$$

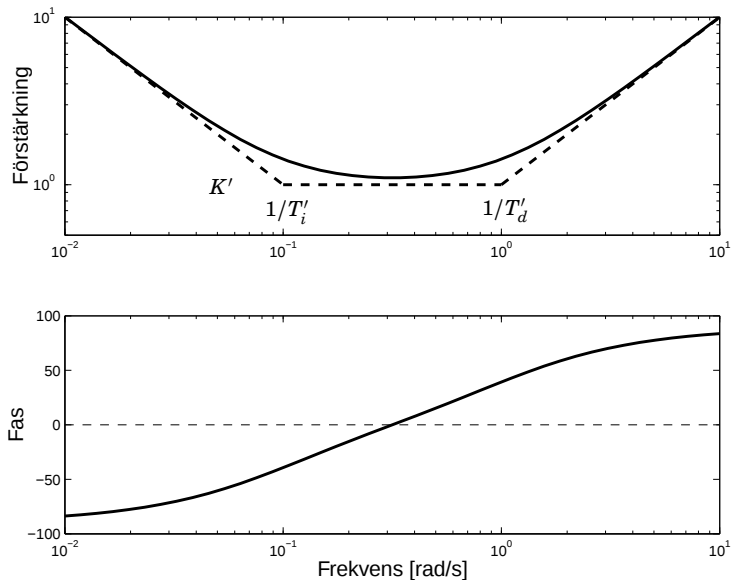
- För låga frekvenser (små  $\omega$ ):

$$|G'_c(i\omega)| \approx \frac{K'}{\omega T'_i}$$

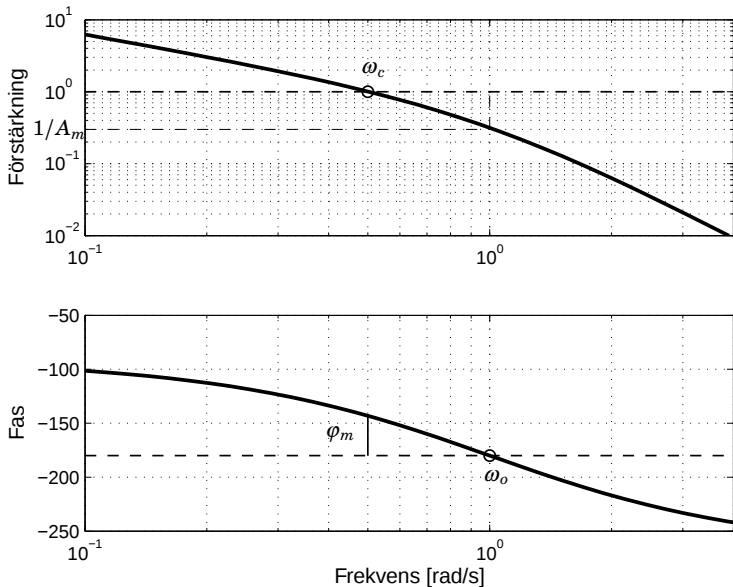
$$\arg G'_c(i\omega) \approx -90^\circ$$

- Nollstället i  $s = -1/T'_i$  böjer upp amplitudkurvan och höjer faskurvan med  $90^\circ$  kring  $\omega = 1/T'_i$
- Nollstället i  $s = -1/T'_d$  böjer upp amplitudkurvan och höjer faskurvan med  $90^\circ$  kring  $\omega = 1/T'_d$

# Frekvensanalys av PID-regulatorn



# Repetition: Amplitud- och fasmarginal



# Frekvensanalys av PID-regulatorn

---

## P-delen:

- ▶ Påverkar förstärkningen vid alla frekvenser
- ▶ Högre förstärkning ger snabbare slutet system men sämre amplitud- och fasmarginal

## I-delen:

- ▶ Ökar förstärkningen och minskar fasen vid låga frekvenser
- ▶ Undertrycker lågfrekventa (konstanta) reglerfel men ger sämre fasmarginal

## D-delen:

- ▶ Ökar förstärkningen och fasen vid höga frekvenser
- ▶ Ger bättre fasmarginal (upp till en gräns) men förstärker högfrekventa mätstörningar

# Praktiska modifieringar av PID-regulatorn

---

Läroboksformen:

$$e(t) = r(t) - y(t)$$
$$u(t) = \underbrace{K e(t)}_{P(t)} + \underbrace{\frac{K}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau}_{I(t)} + \underbrace{K T_d \frac{de(t)}{dt}}_{D(t)}$$

Modifieringar:

- ▶ P-delen: referensviktning
- ▶ I-delen: uppvridningsskydd
- ▶ D-delen: referensviktning och begränsad förstärkning

## Modifiering av P-delen

---

Inför referensviktning  $\beta$ :

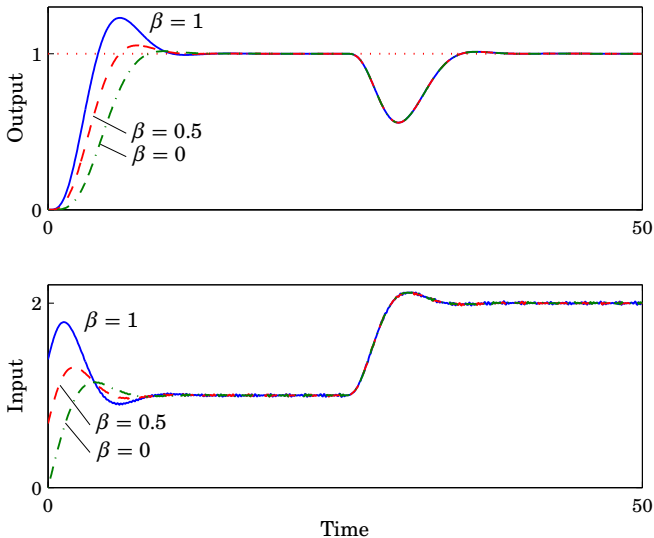
$$P(t) = K(\beta r(t) - y(t)), \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

Kan användas för att minska överslängen vid referensändringar (flyttar ett nollställe hos slutna systemet)

OBS! Fungerar bara om även I-delen är inkopplad

# Exempel: Referensviktning vid PI-reglering

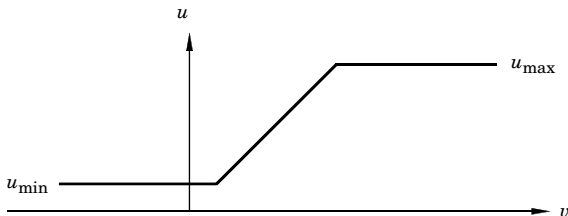
(referensändring vid  $t = 0$ , laststörning vid  $t = 25$ ):



## Modifiering av I-delen

Styrsignalen är i praktiken alltid begränsad ( $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$ )

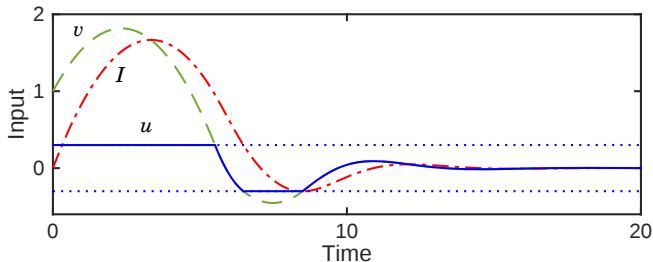
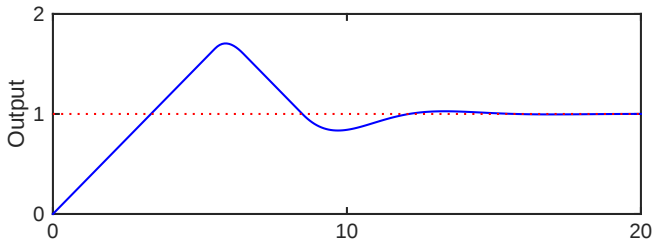
- ▶ Låt  $v$  vara den signal regulatorn *vill* ställa ut
- ▶ Låt  $u$  vara den signal regulatorn *kan* ställa ut



Problem med integratoruppvridning (*reset/integrator windup*):  
I-delen fortsätter att växa fast styrsignalen är mättad

# Exempel: PI-reglering med integratoruppvridning

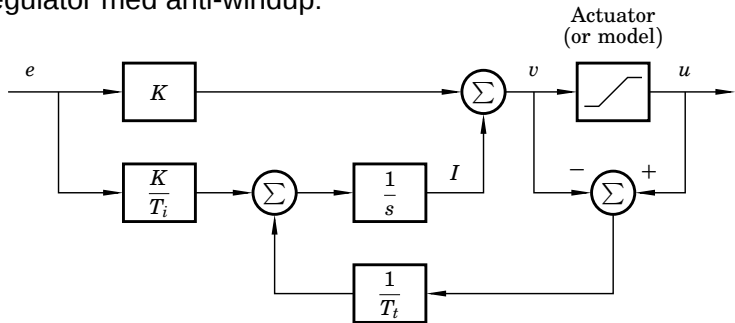
$$G_p(s) = 1/s, \quad K = T_i = 1, \quad -0.3 \leq u \leq 0.3:$$



# Uppvridningsskydd (anti-windup)

$$I(t) = \int_0^t \left( \frac{K}{T_i} e(\tau) + \frac{1}{T_t} (u(\tau) - v(\tau)) \right) d\tau$$

PI-regulator med anti-windup:

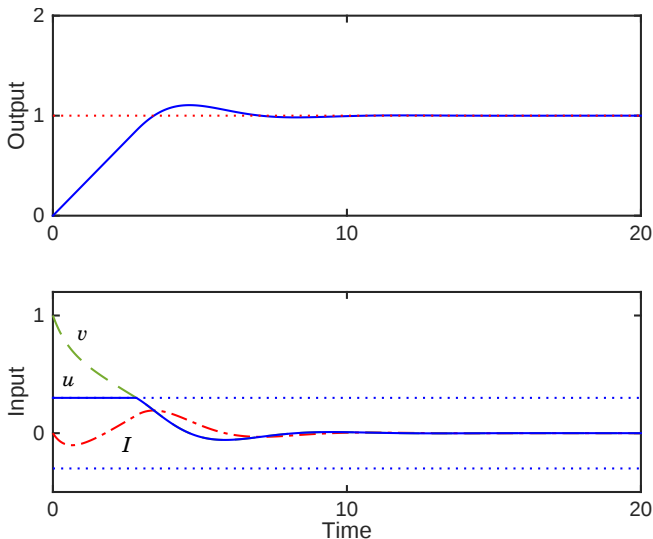


Tumregler för val av konstanten  $T_t$ :

- ▶ PI-regulator:  $T_t = 0.5T_i$
- ▶ PID-regulator:  $T_t = \sqrt{T_i T_d}$

# Exempel: PI-reglering med uppvridningsskydd

Samma exempel som tidigare, med uppvridningsskydd ( $T_t = 0.5$ ):



## Modifiering av D-delen

---

- ▶ Referensviktning: derivera endast mätsignalen, ej referensen:

$$D(t) = -KT_d \frac{dy(t)}{dt}$$

- ▶ Begränsa förstärkningen med ett lågpasfilter (extra pol):

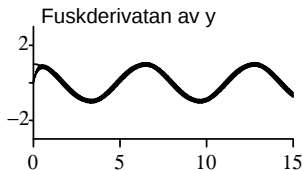
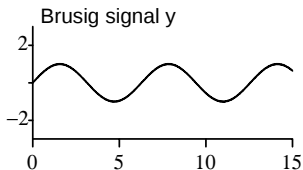
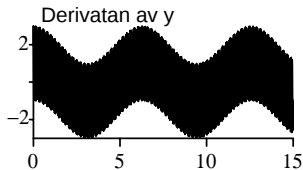
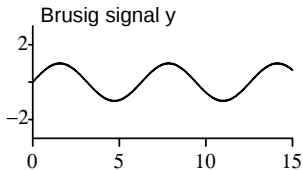
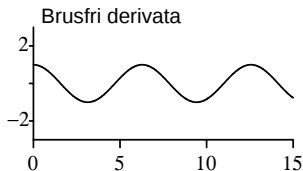
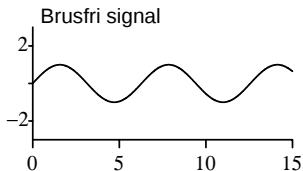
$$D(s) = -\frac{sKT_d}{1 + sT_d/N} Y(s)$$

(“fuskderivata”)

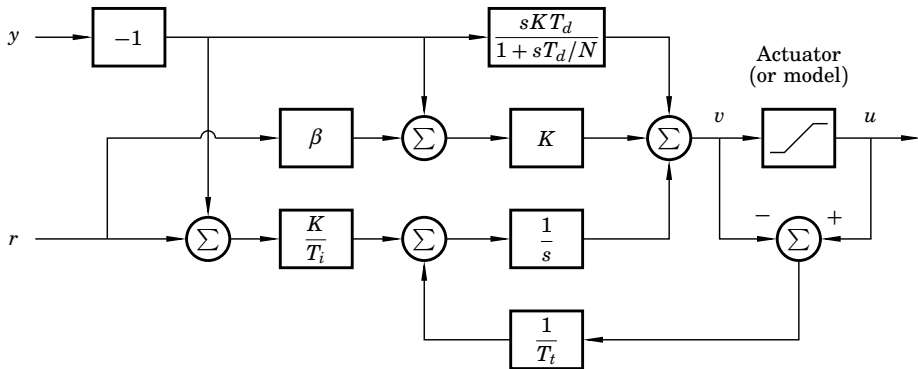
Maximala derivataförstärkningen  $N$  väljs typiskt i intervallet 5–20

# Exempel: Begränsad derivataförstärkning

$$y(t) = \sin t + 0.01 \sin 100t, \quad T_d = 1, \quad N = 5$$



# Sammanfattning av praktiska modifieringar



(Mer att tänka på: stötfri övergång mellan manuell/automatisk reglering, stötfria parameterbyten, församlingsfilter, sampling, ...)

# Inställningsmetoder för PID-regulatorer

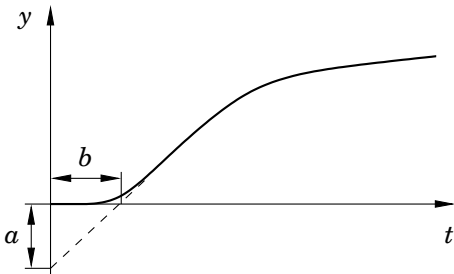
---

- ▶ Manuell inställning (lab 1)
- ▶ Ziegler–Nichols metoder
- ▶ Lambda-metoden
- ▶ Arresttidstrimning (miniprojekt)
- ▶ Modellbaserad inställning (lab 2)
- ▶ Relämetoder
- ▶ Optimeringsbaserade metoder
- ▶ ...

Fortfarande aktivt forskningsområde!

# Ziegler–Nichols stegsvarsmetod

Experiment på **öppet system**. Läs av  $a$  och  $b$  i stegsvaret för processen (approximerad som integrerande process med dödtid):



| Regulator | $K$     | $T_i$ | $T_d$  |
|-----------|---------|-------|--------|
| P         | $1/a$   |       |        |
| PI        | $0.9/a$ | $3b$  |        |
| PID       | $1.2/a$ | $2b$  | $0.5b$ |

# Ziegler–Nichols frekvensmetod

---

(Ziegler–Nichols' ultimate-sensitivity method)

Experiment på **slutet** system

1. Koppla bort integral- och derivatadelen hos PID-regulatorn.
2. Öka  $K$  tills systemet självsvänger med konstant amplitud. Detta värde på  $K$  betecknas  $K_0$ .
3. Uppmät periodtiden  $T_0$  hos självsvängningen.

| Regulator | $K$       | $T_i$     | $T_d$   |
|-----------|-----------|-----------|---------|
| P         | $0.5K_0$  |           |         |
| PI        | $0.45K_0$ | $T_0/1.2$ |         |
| PID       | $0.6K_0$  | $T_0/2$   | $T_0/8$ |

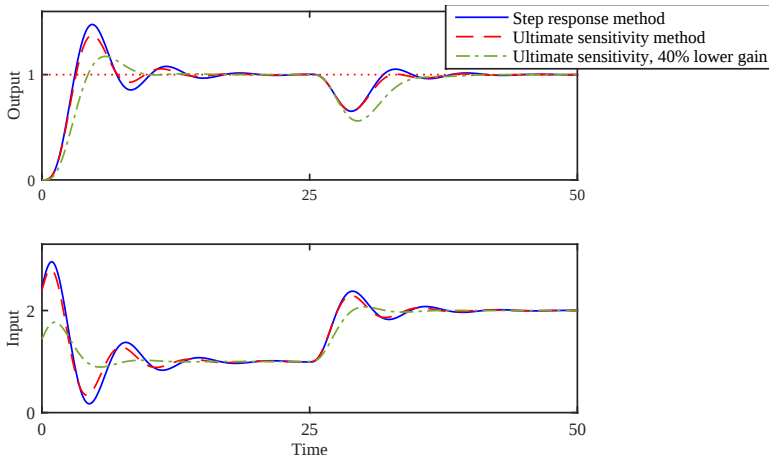
(Notera att  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , där  $\omega_0$  är den vinkelfrekvens som ger  $-180^\circ$  fasförskjutning)

# Ziegler–Nichols metoder – varning

Ziegler–Nichols metoder ger aggressiv reglering med dålig dämpning

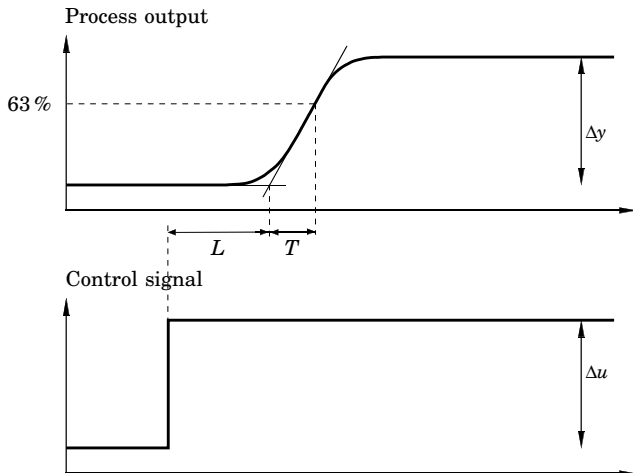
Rekommenderas att  $K$ -värdet sänks med 30–50 % för bättre robusthet

Exempel: PID-reglering av  $G_p(s) = 1/(s + 1)^4$ :



# Lambda-metoden

1. Läs av dödtdid  $L$ , tidskonstant  $T$  och statisk förstärkning  $K_p = \frac{\Delta y}{\Delta u}$  från ett stegsvarsexperiment:



# Lambda-metoden

---

2. Välj  $\lambda$  = önskad tidskonstant för slutna systemet

- ▶  $\lambda = T$  vanligt val
- ▶  $\lambda = 2T$  för ännu större robusthet

3. PI-regulator:

$$K = \frac{1}{K_p} \frac{T}{L + \lambda}, \quad T_i = T$$

PID-regulator (på serieform):

$$K' = \frac{1}{K_p} \frac{T}{L/2 + \lambda}, \quad T'_i = T, \quad T'_d = \frac{L}{2}$$

# Lambda-metoden – härledning för PI-regulatorn

---

Process:

$$G_p(s) = \frac{K_p e^{-sL}}{1 + sT}$$

PI-regulator, sätt  $T_i = T$  för att förkorta bort processpolen:

$$G_c(s) = K \frac{1 + sT}{sT}$$

Slutet system, approximera  $e^{-sL}$  ämed  $1 - sL$  i nämnaren:

$$G(s) = \frac{G_p(s)G_c(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)} = \frac{K_p K e^{-sL}}{sT + K_p K e^{-sL}} \approx \frac{e^{-sL}}{1 + s(T/(K_p K) - L)}$$

$$\text{Önskad tidskonstant } \lambda = T/(K_p K) - L \Rightarrow K = \frac{T}{K_p(\lambda + L)}$$

## Modellbaserad inställning (Lab 2)

---

1. Tag fram processens överföringsfunktion  $G_p(s)$
2. Välj regulator typ  $G_c(s)$
3. Beräkna slutna systemets överföringsfunktion:

$$G(s) = \frac{G_p(s)G_c(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)}$$

4. Välj regulatorparametrar så att  $G(s)$  får önskade poler / önskat karakteristiskt polynom (polplacering)