

# Systemteknik/Processreglering F8

---

## Frekvensanalys

- ▶ Frekvenssvar
- ▶ Bode- och Nyquistdiagram
- ▶ Stabilitet och stabilitetsmarginaler

Läsanvisning: *Process Control*: 7.1–7.5

# Frekvensanalys

---

Studera hur system reagerar på signaler i olika frekvensområden

Exempel:

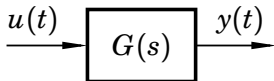
- ▶ Laststörningar – mest låga frekvenser
- ▶ Mätbrus – höga frekvenser

Om systemet är linjärt så kan man studera svaret för varje frekvens separat

- ▶ Sinus in  $\Rightarrow$  sinus ut
- ▶ Kan t.ex. användas för att ta fram överföringsfunktioner experimentellt (systemidentifiering)

# Frekvenssvar

---



$$u(t) = \sin \omega t$$

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$A = |G(i\omega)|$$

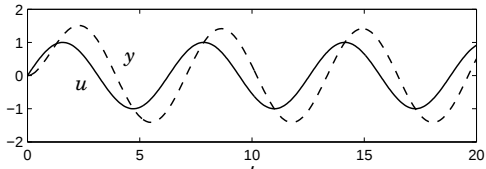
$$\varphi = \arg G(i\omega)$$

- ▶  $\omega$ : frekvens [rad/s]
- ▶  $G(i\omega)$ : frekvensfunktion
- ▶  $|G(i\omega)|$ : amplitud(funktion), förstärkning, magnitud
- ▶  $\arg G(i\omega)$ : fas(funktion), fasförskjutning

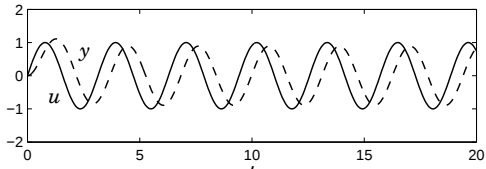
## Exempel: $G(s) = \frac{2}{s+1}$

---

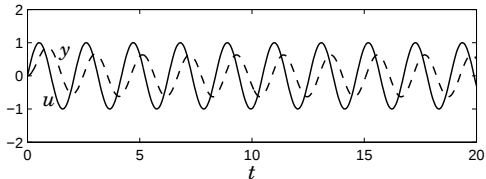
$\omega = 1$  rad/s:



$\omega = 2$  rad/s:



$\omega = 3$  rad/s:



# Räkneregler för komplexa tal

---

$$z = x + iy$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\arg z = \arctan \frac{y}{x} \quad (\text{om } x > 0)$$

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

## Exempel: $G(s) = \frac{2}{s+1}$

---

$$G(i\omega) = \frac{2}{i\omega + 1}$$

$$|G(i\omega)| = \frac{2}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$\arg G(i\omega) = -\arctan \omega$$

| $\omega$ | $ G(i\omega) $ | $\arg G(i\omega)$ |
|----------|----------------|-------------------|
| 0        | 2              | $0^\circ$         |
| 1        | $\sqrt{2}$     | $-45^\circ$       |
| $\infty$ | 0              | $-90^\circ$       |

# Bodediagram

---

Rita  $|G(i\omega)|$  och  $\arg G(i\omega)$  som funktioner av  $\omega$

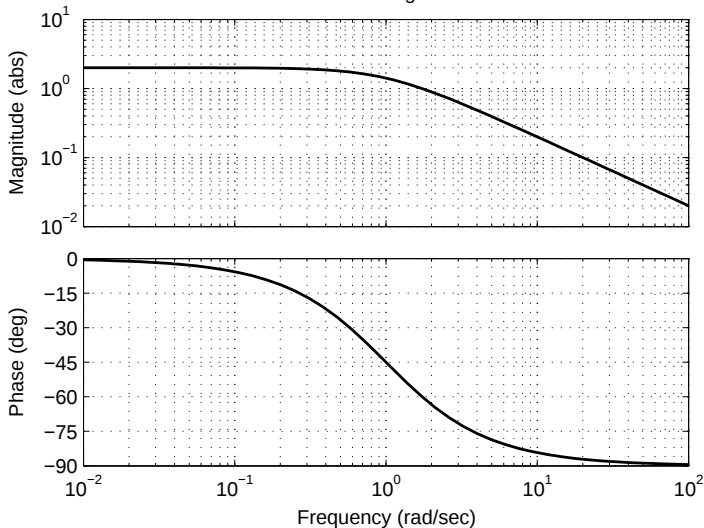
- ▶ Amplitudkurvan  $|G(i\omega)|$  ritas i log-log-skala
- ▶ Faskurvan  $\arg G(i\omega)$  ritas i log-lin-skala

(MATLAB-kommando: `bode`)

# Exempel: $G(s) = \frac{2}{s+1}$

---

Bode Diagram



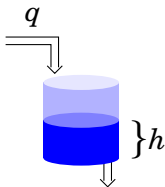
# Miniproblem

---

Avläs i Bodediagrammet:

- ▶ Hur mycket förstärks och fasförskjuts signaler med frekvensen  $0.5 \text{ rad/s}$ ?
- ▶ Hur mycket förstärks och fasförskjuts signaler med frekvensen  $5 \text{ rad/s}$ ?

# Exempel: nivåodynamik i tank



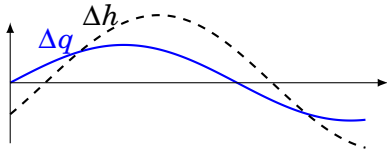
Linjäriserad modell:

$$\Delta H(s) = \frac{K_1}{sT_1 + 1} \Delta Q(s)$$

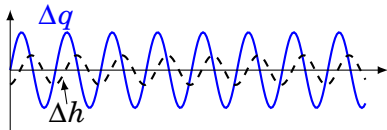
System konfigurerat så att  
 $K_1 = 2, T_1 = 1 \Rightarrow$

$$\Delta H(s) = \frac{2}{s + 1} \Delta Q(s)$$

Inflöde  $\Delta q(t) = \sin 0.5t$ :



Inflöde  $\Delta q(t) = \sin 5t$ :



## Att skissa/tolka Bodediagram

---

Antag  $G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s) \dots$

Då

$$\log |G(i\omega)| = \log |G_1(i\omega)| + \log |G_2(i\omega)| + \log |G_3(i\omega)| + \dots$$

$$\arg G(i\omega) = \arg G_1(i\omega) + \arg G_2(i\omega) + \arg G_3(i\omega) + \dots$$

- Bidragen från  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ , ... adderas i både amplitud- och fasdiagrammet

# Typsystem i formelsamlingen

---

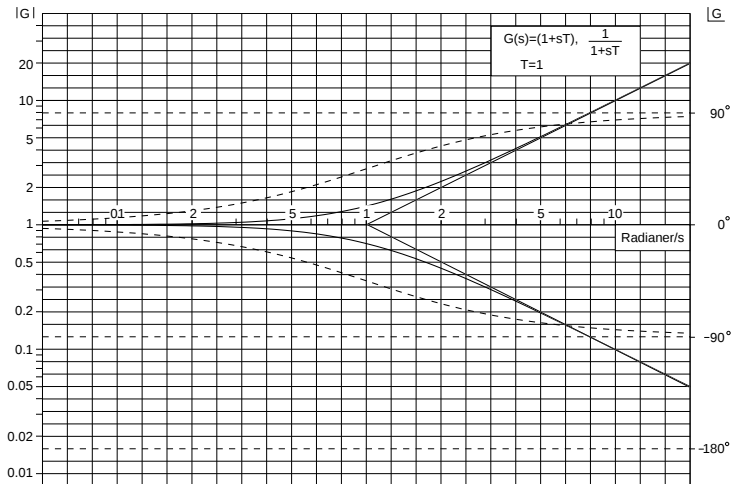
$$\frac{1}{1 + sT}, \quad 1 + sT \quad \text{reell pol, reellt nollställe}$$

$$e^{-sL} \quad \text{dödtid}$$

$$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta \omega_0 s + \omega_0^2} \quad \text{komplext polpar}$$

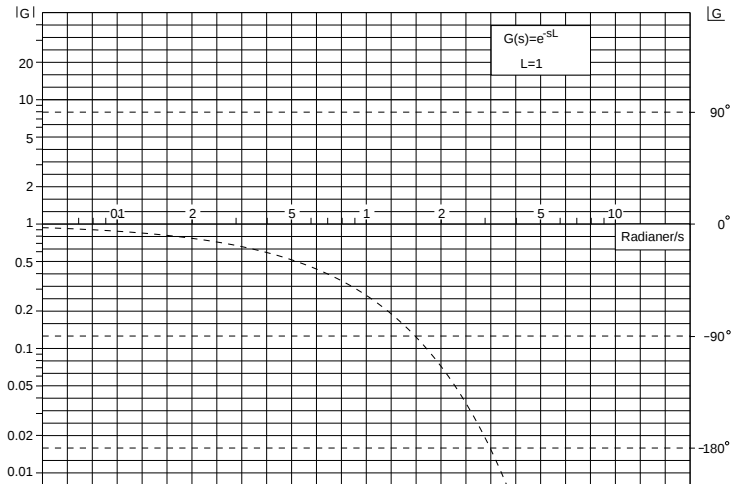
(Se s. 73–77 i *Process Control* för ännu fler exempel)

# Bodediagram för reell pol eller reellt nollställe



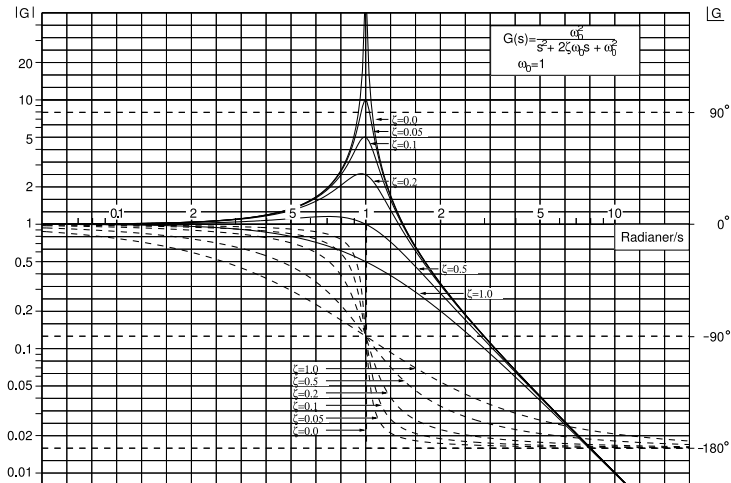
- En pol i  $s = -\frac{1}{T}$  böjer ner amplitudkurvan och sänker faskurvan med  $90^\circ$  kring  $\omega = \frac{1}{T}$ ; omvänt för ett nollställe

# Bodediagram för döttid



- En döttid sänker faskurvan exponentiellt men påverkar inte amplitudkurvan

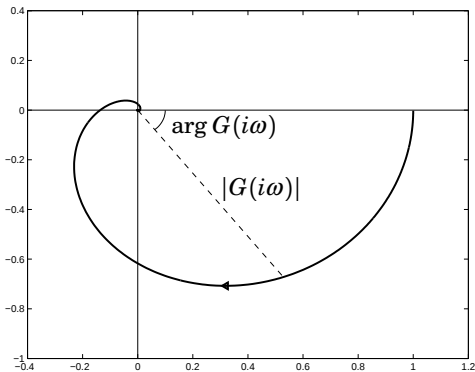
# Bodediagram för komplexa poler



- Komplexa poler med liten dämpning  $\zeta$  har en stor resonanstopp vid egenfrekvensen  $\omega_0$  i amplitudkurvan

# Nyquistdiagram

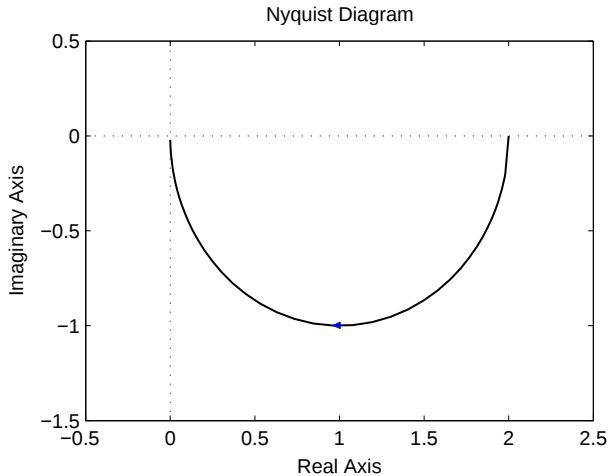
Rita kurvan  $G(i\omega)$  i komplexa talplanet då  $\omega$  går från 0 till  $\infty$ .



(MATLAB-kommando: `nyquist`)

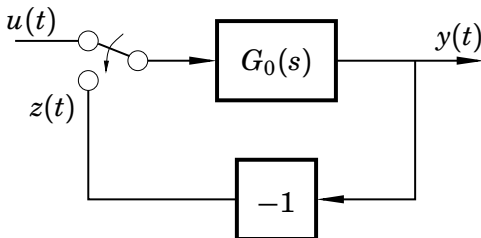
# Exempel: $G(s) = \frac{2}{s+1}$

---



# Stabilitet för återkopplade system

---



Antag att öppna systemet  $G_0(s) = G_c(s)G_p(s)$  är stabilt

$$\begin{aligned} u(t) = \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad y(t) &= |G_0(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G_0(i\omega)) \\ z(t) &= -|G_0(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G_0(i\omega)) \\ &= |G_0(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G_0(i\omega) + 180^\circ) \end{aligned}$$

# Stabilitet för återkopplade system

---

Om  $u(t) = z(t)$  uppstår en stabil självsvängning i kretsen när brytaren slås om

Detta händer om

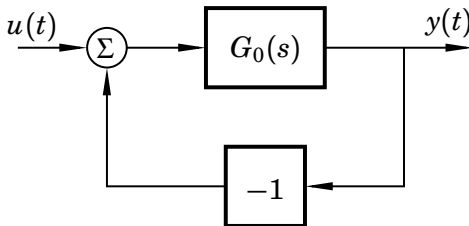
$$\begin{aligned} |G_0(i\omega)| &= 1 \\ \arg G_0(i\omega) &= -180^\circ \end{aligned}$$



Nyquistkurvan för  $G_0(s)$  går genom punkten  $-1$

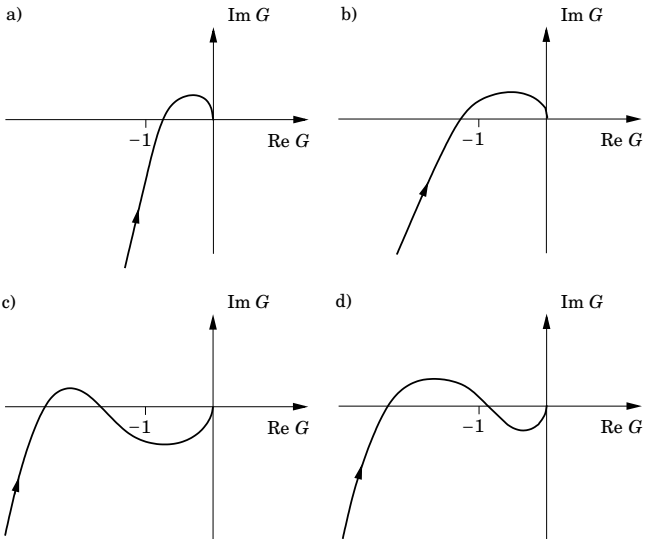
# Nyquists stabilitetssats

---



Antag att öppna systemet  $G_0(s)$  saknar poler i höger halvplan. Det slutna systemet är asymptotiskt stabilt om punkten  $-1$  ligger till vänster om Nyquistkurvan när den traverseras från  $\omega = 0$  till  $\omega = \infty$ .

# Exempel



a) as. stabil, b) instabil, c) as. stabil, d) instabil

# Harry Nyquist (1889–1976)

---

- ▶ Född i Nilsby, Värmland
- ▶ Karriär i USA
  - ▶ Univ. of North Dakota
  - ▶ Yale University
  - ▶ AT&T Bell Laboratories
- ▶ Tre viktiga resultat:
  - ▶ Nyquists stabilitetssats
  - ▶ Johnson–Nyquist-bruset
  - ▶ Nyquists samplingssats

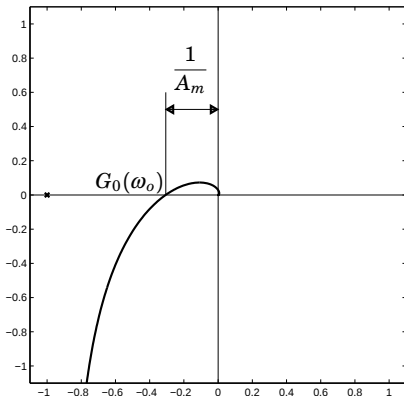


Fig. 10-1. H. Nyquist, who originated many fundamental concepts of communications, including the criterion for stability of negative feedback amplifiers and sampling theory as applied to digital systems.

# Amplitudmarginal

Amplitudmarginalen anger hur mycket förstärkningen kan öka utan att slutna systemet blir instabilt:

- ▶ Låt  $\omega_0$  vara den minsta frekvens där  $\arg G_0(i\omega_0) = -180^\circ$
- ▶ Amplitudmarginalen ges av  $A_m = 1/|G_0(i\omega_0)|$

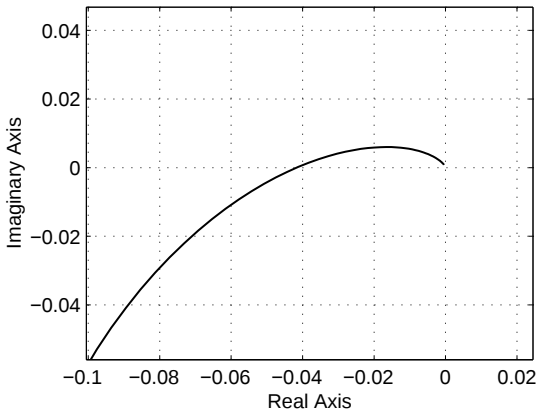


## Exempel (I1 uppgift 10)

Överföringsfunktion från insignal till koncentrationen i kammare 3:

$$G_3(s) = \frac{1}{(s + 3.732)(s + 1)(s + 0.2679)}$$

Nyquistkurva:



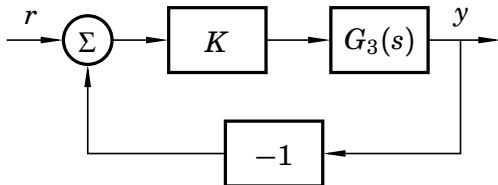
## Exempel (I1 uppgift 10)

---

Avläsning av amplitudmarginal:

$$\frac{1}{A_m} = 0.042 \quad \Leftrightarrow \quad A_m = 24$$

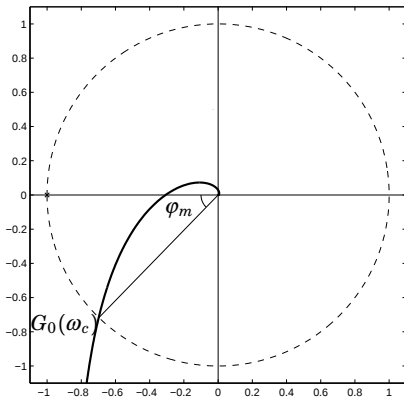
Tolkning: Om man reglerar systemet med en P-regulator kan förstärkningen vara max 24 utan att slutna systemet blir instabilt.



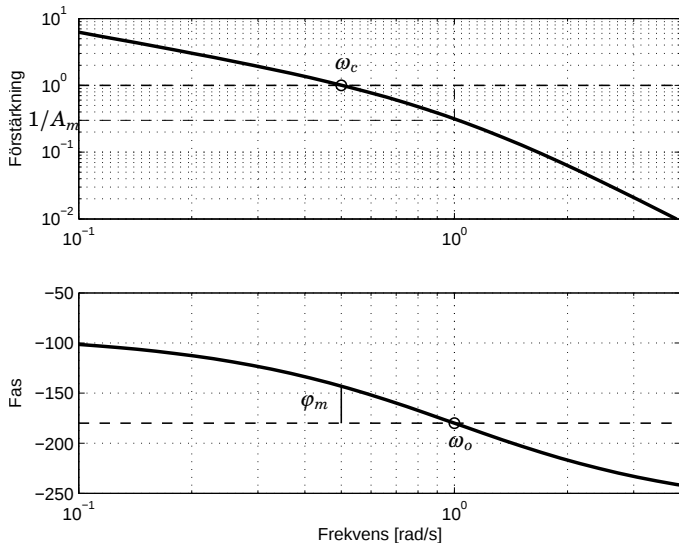
# Fasmarginal

Fasmarginalen anger hur mycket fasen kan minska utan att slutna systemet blir instabilt:

- ▶ Låt  $\omega_c$  vara den minsta frekvens där  $|G_0(i\omega_c)| = 1$
- ▶ Fasmarginalen ges av  $\varphi_m = 180^\circ + \arg G_0(i\omega_c)$



# Amplitud- och fasmarginal i Bodediagrammet



# Robusthet

---

För att få ett robust slutet system vill man typiskt ha

- ▶  $A_m \in [2, 6]$
- ▶  $\varphi_m \in [45^\circ, 60^\circ]$

Ju större marginaler, desto mindre känslighet för modellfel och parametervariationer