

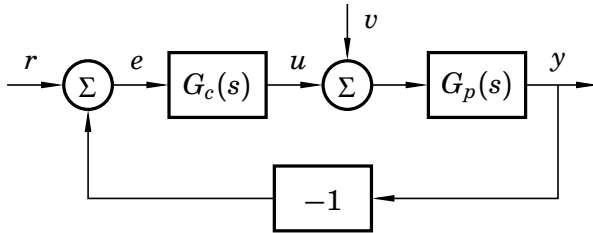
Återkopplade system, forts.

- ▶ Analys av stationära fel
- ▶ Linjärisering via återkoppling
- ▶ Analys av känslighet

Läsanvisning: *Process Control*: 6.2–6.3

Analys av stationära fel

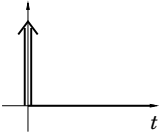
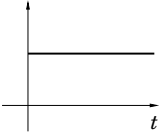
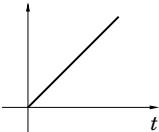
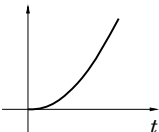
Standardkrets med regulator $G_c(s)$ och process $G_p(s)$; antag slutna systemet asymptotiskt stabilt



Vad blir det stationära reglerfelet $e(\infty)$ beroende på

- ▶ referensvärdet r (servoproblemet)?
- ▶ laststörningen v (regulatorproblemet)?

Signalmodeller

	Laststörning	Referensvärde
Impuls:		—
Steg:		$R(s) = \frac{a}{s}$
Ramp:		$R(s) = \frac{b}{s^2}$
Parabel:		$R(s) = \frac{c}{s^3}$

Analys av stationära fel

Reglerfelet ges av

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_p(s)G_c(s)}R(s) - \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)}V(s)$$

Det stationära felet kan beräknas med slutvärdesteoremet:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

Stationära fel – servoproblemet

Sätt $V(s) = 0$ och antag

$$G_p(s)G_c(s) = \frac{KQ(s)}{s^n P(s)}, \quad Q(0) = P(0) = 1$$

- n = totala antalet integratorer i regulatorn och processen

Då:

$$E(s) = \frac{s^n P(s)}{s^n P(s) + KQ(s)} R(s)$$

Stationära fel – servoproblemet

Stationärt fel med stegreferens, $R(s) = a/s$:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^n P(s)a}{s^n P(s) + KQ(s)} = \begin{cases} a/(1+K) & n = 0 \\ 0 & n \geq 1 \end{cases}$$

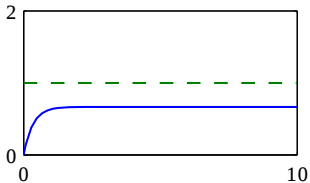
Stationärt fel med rampreferens, $R(s) = b/s^2$:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^n P(s)}{s^n P(s) + KQ(s)} \cdot \frac{b}{s} = \begin{cases} \infty & n = 0 \\ b/K & n = 1 \\ 0 & n \geq 2 \end{cases}$$

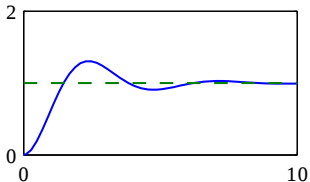
Stationära fel – servoproblemet

Stegreferens, $R(s) = a/s$

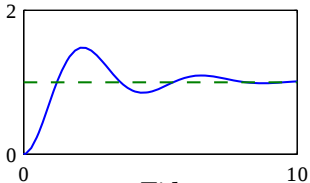
$n = 0$



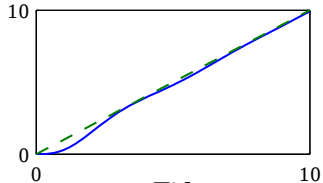
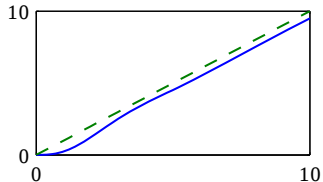
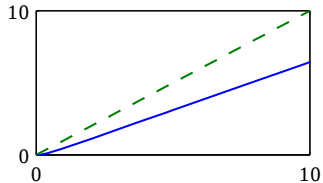
$n = 1$



$n = 2$



Rampreferens, $R(s) = b/s^2$



Stationära fel – regulatorproblemet

Sätt $R(s) = 0$ och antag $K = K_1 K_2$, $Q = Q_1 Q_2$, $P = P_1 P_2$ så att

$$G_c(s) = \frac{K_1 Q_1(s)}{s^m P_1(s)}, \quad Q_1(0) = P_1(0) = 1$$

$$G_p(s) = \frac{K_2 Q_2(s)}{s^{n-m} P_2(s)}, \quad Q_2(0) = P_2(0) = 1$$

- ▶ m = antalet integratorer i regulatorn
- ▶ n = totala antalet integratorer i regulatorn och processen

Då:

$$E(s) = -\frac{s^m K_2 P_1(s) Q_2(s)}{s^n P(s) + K Q(s)} V(s)$$

Stationära fel – regulatorproblemet

Stationärt fel med impulsstörning, $V(s) = 1$:

$$e(\infty) = 0$$

Stationärt fel med stegstörning, $V(s) = a/s$:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{s^m K_2 P_1(s) Q_2(s) a}{s^n P(s) + K Q(s)} = \begin{cases} -a K_2 / (1 + K) & m = 0, n = 0 \\ -a / K_1 & m = 0, n \geq 1 \\ 0 & m \geq 1 \end{cases}$$

Stationärt fel med rampstörning, $V(s) = b/s^2$:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{s^m K_2 P_1(s) Q_2(s)}{s^n P(s) + K Q(s)} \cdot \frac{b}{s} = \begin{cases} -\infty & m = 0 \\ -b / K_1 & m = 1 \\ 0 & m \geq 2 \end{cases}$$

Stationära fel – slutsatser

Servoproblemet:

- ▶ Följa stegreferens kräver 1 integrator i regulatorn/processen
- ▶ Följa rampreferens kräver 2 integratorer i regulatorn/processen
- ▶ Följa parabelreferens kräver 3 integratorer i regulatorn/processen
- ▶ o.s.v.

Regulatorproblemet:

- ▶ Eliminera impulsstörning kräver asymptotiskt stabilt slutet system
- ▶ Eliminera stegstörning kräver 1 integrator i regulatorn
- ▶ Eliminera rampstörning kräver 2 integratorer i regulatorn
- ▶ o.s.v.

Linjärisering via återkoppling

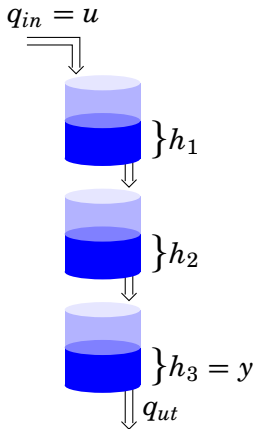
Olinjäriteter i ställdon (t.ex. ventiler, pumpar) försvårar reglering och analys av återkopplade system



Två metoder för att linjärisera statisk olinjäritet $f(u)$:

- ▶ Förmultiplicera med omvänd olinjäritet
- ▶ Inför inre återkoppling (ofta P-reglering)

Exempel: Reglering av trippeltank



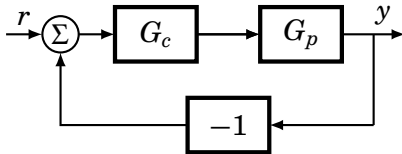
Överföringsfunktion från u till y

$$G_p(s) = \frac{2}{(s+1)^3}$$

PI-regulator:

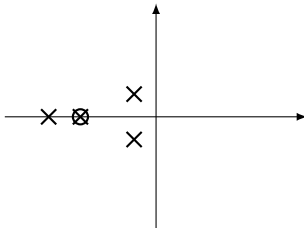
$$G_c(s) = \frac{s+1}{8s}$$

Blockdiagram

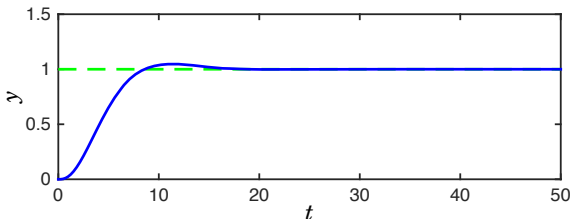


Exempel: Reglering av trippeltank

Singularitetsdiagram för återkopplat system:

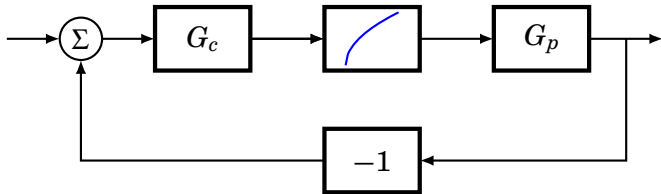


Stegsvar för återkopplat system:



Exempel: Reglering av trippeltank

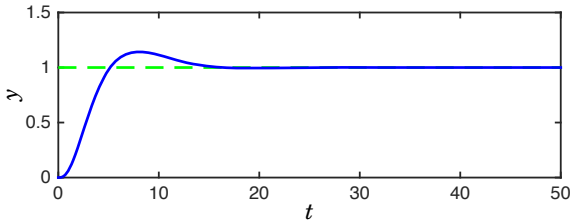
Antag inflödet bestäms av snabböppnande ventil som beskrivs av statisk olinjäritet $f(u) = u^{0.5}$, $0 \leq u \leq 1$:



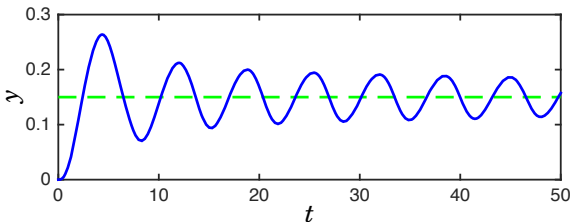
Hur påverkas stegsvaret av olinjäriteten?

Exempel: Reglering av trippeltank

Stegsvar för återkopplat system, $r(t) = 1$:



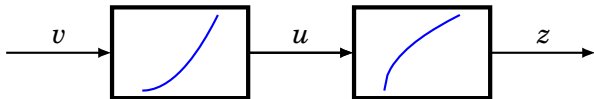
Stegsvar för återkopplat system, $r(t) = 0.15$:



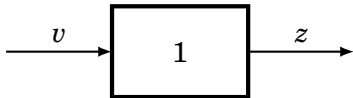
Olinjäritet ger olika stegsvar för olika stora steg!

Linjärisering med omvänd olinjäritet

Förmultiplicera ventilläget med $g(v) = v^2$ före utställning



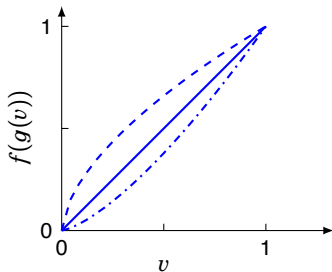
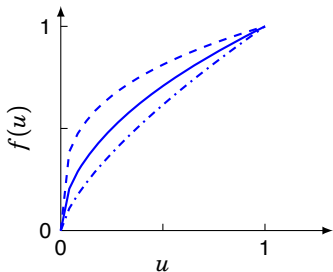
Då fås $z = f(u) = f(g(v)) = f(v^2) = (v^2)^{0.5} = v$



Känslighet för parametervariationer

Om ventilens karakteristik egentligen är (vänstra figuren)

$$z = f(u) = u^{\alpha}, \quad \alpha = 0.3, 0.5, 0.7$$



fås följande kompensering med $g(v) = v^2$ (högra figuren):

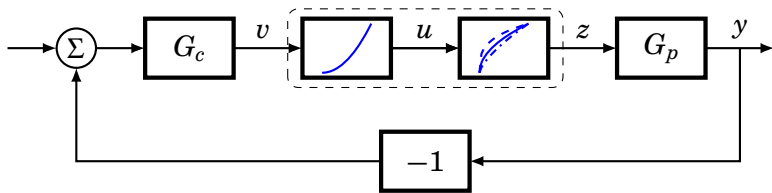
$$\alpha = 0.3 : f(g(v)) = f(v^2) = v^{0.6}$$

$$\alpha = 0.5 : f(g(v)) = f(v^2) = v$$

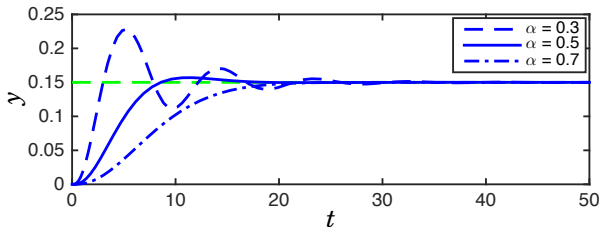
$$\alpha = 0.7 : f(g(v)) = f(v^2) = v^{1.4}$$

Statisk kompensering av olinjäritet

Statisk kompensering $g(v) = v^2$

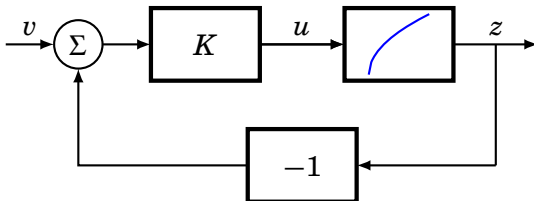


Stegsvar för återkopplat system, $r(t) = 0.15$:



Linjärisering av statisk olinjärhet

Mät flödet och inför P-reglering runt ventilen:



P-regulator: $u = K(v - z) \Rightarrow$

Olinjärhet ges av: $z = f(u) = u^{0.5} = \sqrt{K(v - z)}$

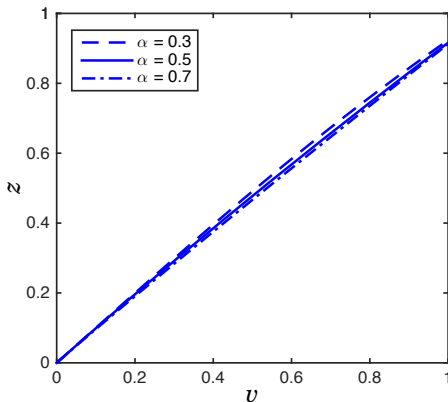
$$z^2 = K(v - z)$$

$$v = z + \frac{z^2}{K}$$

Om K stort får vi $z \approx v$

Linjärisering av statisk olinjäritet

Samband mellan v och z för $K = 10$:

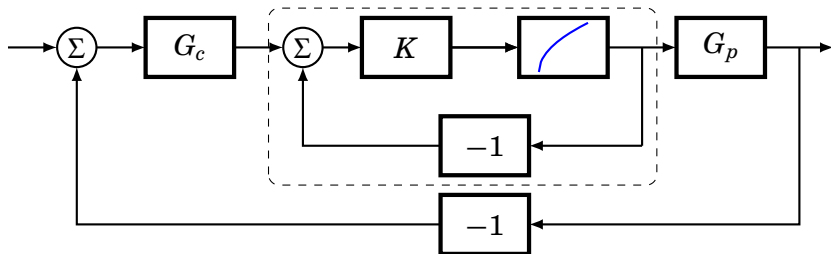


Nära linjärt och okänsligt för parametervariationer!

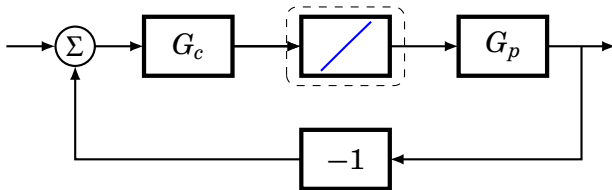
Många andra olinjäriteter kan linjäriseras på samma sätt

Trippeltank: kompensering av olinjäritet

Kompensera olinjäritet med inre återkoppling:

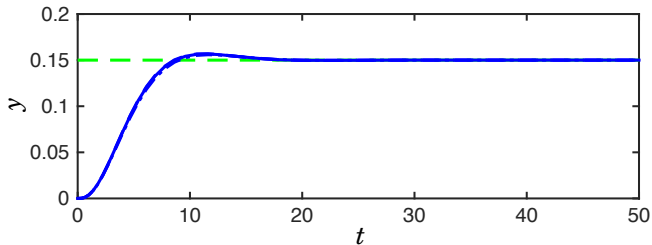


Detta ger:



Stegsvar för kompenserat system

Stegsvar för återkopplat system, $r(t) = 0.15$:



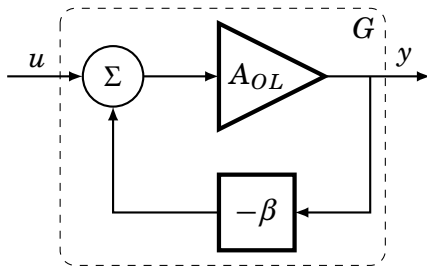
Nästan helt okänsligt för parametervariationer

Exempel: Återkopplingsförstärkaren

Telefonsamtal över långa avstånd: många förstärkare behövs

Dåtidens förstärkare A_{OL} förvrängde ljud genom att förstärka olika frekvenser olika mycket

Återkopplingsförstärkaren uppfunnen av H. Black 1927



Förstärkning från u till y :
$$G = \frac{A_{OL}}{1 + \beta A_{OL}}$$

Om $\beta A_{OL} \gg 1$ blir $G \approx 1/\beta$ (litet β ger stor förstärkning)

Exempel: Återkopplingsförstärkaren

Återkoppling kan eliminera frekvensvariationer i förstärkning

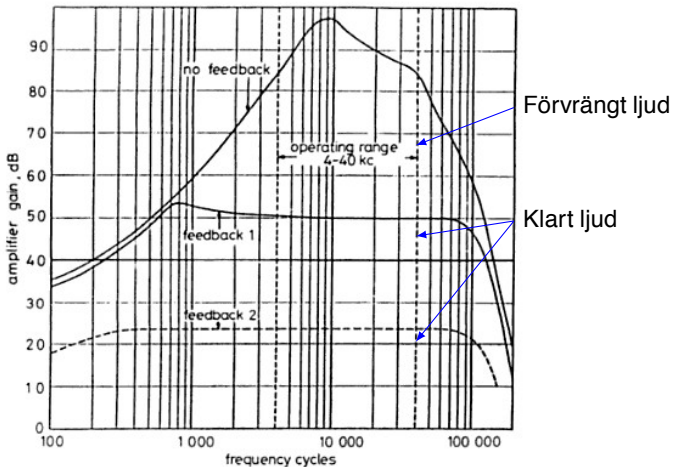
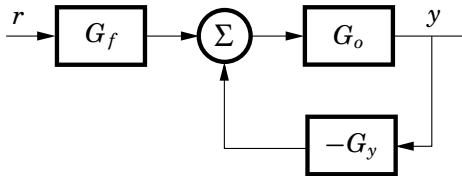


Figure 3.3 Gain frequency characteristics with and without feedback

Reproduced (with partial redrawing) by permission of H.S. Black, from *Bell System Technical Journal*, 1934, 13, p. 12

Analys av känslighet



- ▶ G_o = öppet system (process)
- ▶ G_f = framkoppling
- ▶ G_y = återkoppling

Slutna systemets överföringsfunktion:

$$G_c(s) = \frac{G_f(s)G_o(s)}{1 + G_o(s)G_y(s)}$$

Hur påverkas G_c av variationer i komponenterna G_f , G_o , G_y ?

Analys av känslighet

Definiera den **relativa känsligheten** av en överföringsfunktion G med avseende på komponenten H som

$$S_H = \frac{dG}{dH} \cdot \frac{H}{G} = \frac{dG}{G} \bigg/ \frac{dH}{H}$$

För G_c har vi

$$S_{G_f} = 1$$

$$S_{G_o} = \frac{1}{1 + G_o G_y}$$

$$S_{G_y} = -\frac{G_o G_y}{1 + G_o G_y}$$

Analys av känslighet

Relativa känsligheten S_{G_o} liten om **kretsförstärkningen** $G_o G_y$ stor

Alltför hög förstärkning i återkopplingen kan dock leda till

- ▶ stor återföring av mätbrus
- ▶ instabilitet

Typisk designkompromiss: hög förstärkning vid låga frekvenser (integralverkan); lägre förstärkning vid höga frekvenser

Återkopplade system – sammanfattning

Fördelar:

- ▶ Förändrad dynamik
 - ▶ Snabbare, mera väldämpat, o.s.v.
 - ▶ Slutna systemets poler kan bestämmas genom lämpligt val av regulatorparametrarna – polplacering
- ▶ Undertryckning av störningar
 - ▶ Eliminering av stationära fel kräver integratorer i regulatorn
- ▶ Minskad känslighet mot processvariationer och olinjäriteter

Nackdelar:

- ▶ Återföring av mätbrus
- ▶ Kan leda till instabilitet