

Systemteknik/Processreglering F6

- ▶ Linjärisering
- ▶ Återkopplade system – ett exempel

Läsanvisning: *Process Control*: 5.5, 6.1

Jämviktpunkter

Olinjär process på tillståndsform:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u)\end{aligned}$$

Processens jämviktpunkter (*equilibria*) eller stationära punkter (*stationary points*) är alla punkter (x^0, u^0) där

$$f(x^0, u^0) = 0$$

d.v.s. tillståndsvariablernas tidsderivator är noll.

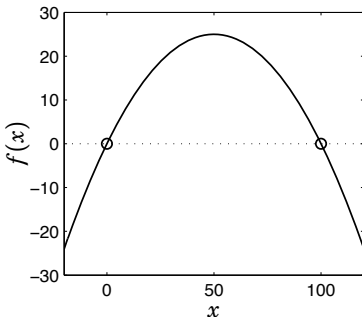
Exempel: Logistisk tillväxtmodell

Antag *birth rate* $r = 1$, *carrying capacity* $k = 100$:

$$\frac{dx}{dt} = x \left(1 - \frac{x}{100} \right) = f(x)$$

Jämviktspunkter:

$$x^0 \left(1 - \frac{x^0}{100} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^0 = 0 \\ x^0 = 100 \end{cases}$$



Linjärisering – en variabel

Antag olinjärt system i en skalär variabel: $\dot{x} = f(x)$

1. Hitta stationär punkt x^0 , där $f(x^0) = 0$
2. Approximera $f(x)$ med en rät linje genom x^0 :

$$f(x) \approx \underbrace{f(x^0)}_{=0} + \underbrace{\frac{df}{dx}(x^0)}_a (x - x^0)$$

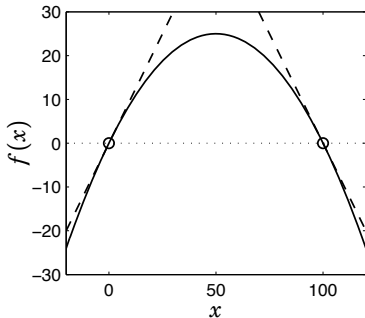
3. Byt tillståndsvariabel och betrakta istället avvikelser Δx från jämviktpunkten:

$$\Delta x = x - x^0$$

4. Systemet kan då skrivas

$$\frac{d\Delta x}{dt} \approx a\Delta x$$

Exempel: Logistisk tillväxtmodell



$$x^0 = 0 \Rightarrow \frac{d\Delta x}{dt} \approx \Delta x \quad (\text{lokalt instabilt})$$

$$x^0 = 100 \Rightarrow \frac{d\Delta x}{dt} \approx -\Delta x \quad (\text{lokalt asymptotiskt stabilt})$$

Linjärisering – allmänna fallet

1. Bestäm en stationär punkt (x^0, u^0) till systemet

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u)\end{aligned}$$

2. Gör 1:a ordningens Taylorapproximationer av f och g kring (x^0, u^0) :

$$\begin{aligned}f(x, u) &\approx \underbrace{f(x^0, u^0)}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, u^0)(x - x^0) + \frac{\partial f}{\partial u}(x^0, u^0)(u - u^0) \\ g(x, u) &\approx \underbrace{g(x^0, u^0)}_{=y^0} + \frac{\partial g}{\partial x}(x^0, u^0)(x - x^0) + \frac{\partial g}{\partial u}(x^0, u^0)(u - u^0)\end{aligned}$$

Linjärisering – allmänna fallet

3. Inför nya variabler $\Delta x = x - x^0$, $\Delta u = u - u^0$ och $\Delta y = y - y^0$
4. Systemet kan nu skrivas som

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(x, u) \approx \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, u^0)}_A \Delta x + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}(x^0, u^0)}_B \Delta u$$
$$\Delta y = g(x, u) - y^0 \approx \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(x^0, u^0)}_C \Delta x + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial u}(x^0, u^0)}_D \Delta u$$

Linjärisering – allmänna fallet

Notera att f och g kan vara vektorer.

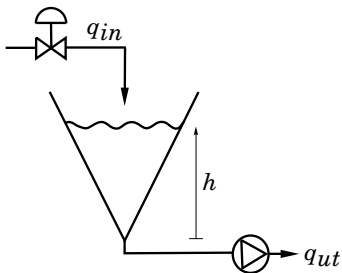
Exempel: Två tillståndsvariabler x_1 och x_2 , en styrsignal u och en mätsignal y innebär

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

$\frac{\partial g}{\partial u}$ är skalär

Exempel: Linjärisering av konisk tank



Antag att q_{ut} är konstant. Modell:

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} &= \frac{4}{\pi h^2} (q_{in} - q_{ut}) &&= f(h, q_{in}) \\ y &= h &&= g(h, q_{in})\end{aligned}$$

Exempel: Linjärisering av konisk tank

1. Stationär punkt: $f(h^0, q_{in}^0) = 0 \Rightarrow q_{in}^0 = q_{ut}$

2. Beräkna partiella derivator:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(h^0, q_{in}^0) = -\frac{8}{\pi(h^0)^3}(q_{in}^0 - q_{ut}) \quad \frac{\partial f}{\partial q_{in}}(h^0, q_{in}^0) = \frac{4}{\pi(h^0)^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial h}(h^0, q_{in}^0) = 1 \quad \frac{\partial g}{\partial q_{in}}(h^0, q_{in}^0) = 0$$

3. Nya variabler: $\Delta h = h - h^0$, $\Delta q_{in} = q_{in} - q_{in}^0$, $\Delta y = y - y^0$

4. Linjär tillståndsmodell:

$$\frac{d\Delta h}{dt} \approx \frac{4}{\pi(h^0)^2} \Delta q_{in}$$

$$\Delta y = \Delta h$$

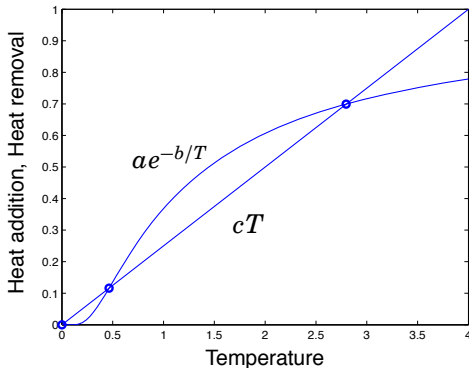
Exempel: Linjärisering av exoterm CSTR

Antag konstant q , V ; låt $J = \frac{(-\Delta H_r)}{\rho C_p}$, $K = \frac{UA}{V\rho C_p}$

$$\frac{dc_A}{dt} = \frac{q}{V}(c_{A,in} - c_A) - k_0 e^{-E/RT} c_A = f_1(c_A, T, T_c)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q}{V}(T_{in} - T) + Jk_0 e^{-E/RT} c_A + K(T_c - T) = f_2(c_A, T, T_c)$$

Värme-
jämvikt:



Exempel: Linjärisering av exoterm CSTR

Beräkna partiella derivator:

$$\frac{\partial f_1}{\partial c_a} = -\frac{q}{V} - k_0 e^{-E/RT}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial T} = -\frac{k_0 E}{RT^2} e^{-E/RT}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial T_c} = 0$$

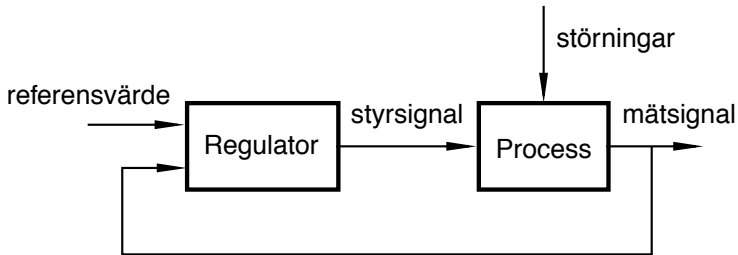
$$\frac{\partial f_2}{\partial c_a} = J k_0 e^{-E/RT}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial T} = -\frac{q}{V} + \frac{J k_0 E}{RT^2} c_A e^{-E/RT} - K$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial T_c} = K$$

O.S.V. . . .

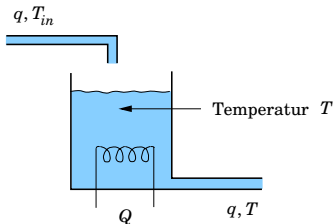
Återkopplade system – sluten styrning



Regulatorn ska utformas så att

- ▶ slutna systemet blir stabilt
- ▶ mätsignalen följer referensvärdet (servoproblemet)
- ▶ störningar undertrycks (regulatorproblemet)
- ▶ okänslighet mot modellfel och parametervariationer erhålls
- ▶ för mycket mätbrus ej återkopplas till processen

Exempel: Temperaturreglering



Energibalans:

$$V\rho C_p \frac{dT(t)}{dt} = q\rho C_p (T_{in}(t) - T(t)) + Q(t)$$

$$\text{Låt } K_1 = \frac{1}{q\rho C_p}, T_1 = \frac{V}{q} \Rightarrow$$

$$T_1 \frac{dT(t)}{dt} + T = K_1 Q(t) + T_{in}(t)$$

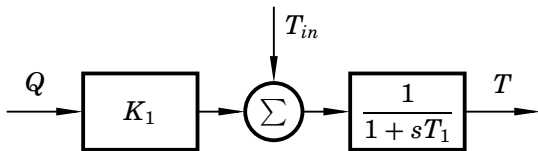
Laplacetransformera $\Rightarrow$

$$T(s) = \frac{1}{1 + sT_1} (K_1 Q(s) + T_{in}(s))$$

Linjär modell: T , Q , T_{in} betecknar avvikelser från ett jämviktsläge

Mål: Håll $T = T_{ref}$ med hjälp av Q trots variationer i T_{in}

Öppet system



Inverkan av stegstörning $T_{in} = 1$ (antag $Q = 0$):

$$T(s) = \frac{1}{1 + sT_1} T_{in}(s) = \frac{1}{s(1 + sT_1)}$$

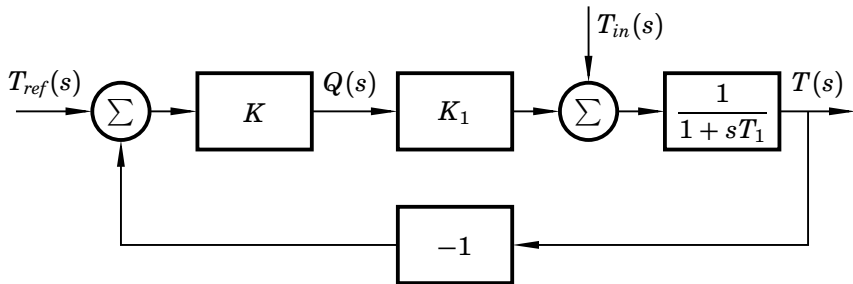
$$T(t) = 1 - e^{-t/T_1}$$

Stationärt: $T = 1$

P-reglering

$$Q(t) = K(T_{ref}(t) - T(t)) = Ke(t)$$

$$Q(s) = K(T_{ref}(s) - T(s)) = KE(s)$$



P-reglering

$$T(s) = \frac{1}{1 + sT_1} \left(K_1 K (T_{ref}(s) - T(s)) + T_{in}(s) \right)$$

$$T(s) = \frac{K_1 K}{1 + sT_1 + K_1 K} T_{ref}(s) + \frac{1}{1 + sT_1 + K_1 K} T_{in}(s)$$

Pol:

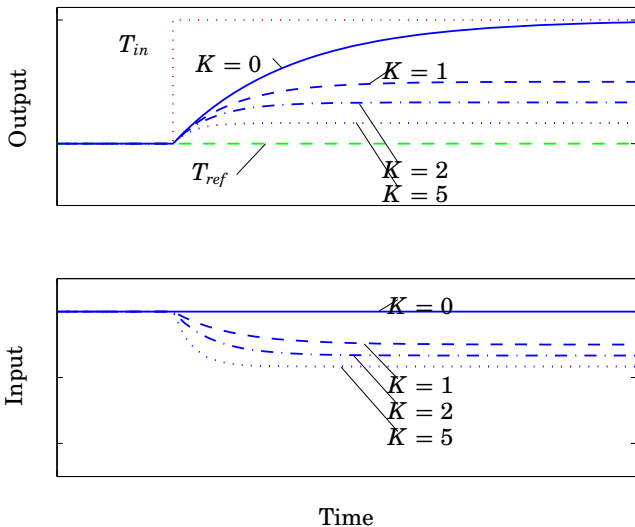
$$s = -\frac{1 + K_1 K}{T_1}$$

As. stabilt om $K > -1/K_1$

Stationärt: $T = \frac{K_1 K}{1 + K_1 K} T_{ref} + \frac{1}{1 + K_1 K} T_{in}$

Simulering av stegstörning

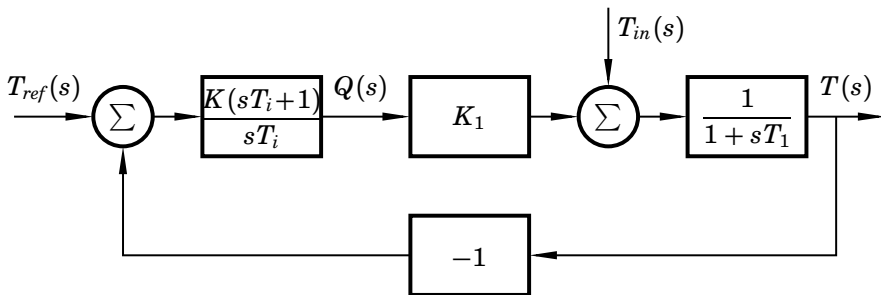
Parametrar: $T_1 = K_1 = 1$:



PI-reglering

$$Q(t) = K \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int^t e(\tau) d\tau \right)$$

$$Q(s) = K \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right) E(s)$$



PI-reglering

$$T(s) = \frac{1}{1 + sT_1} \left(\frac{K_1 K (sT_i + 1)}{sT_i} (T_{ref}(s) - T(s)) + T_{in}(s) \right)$$

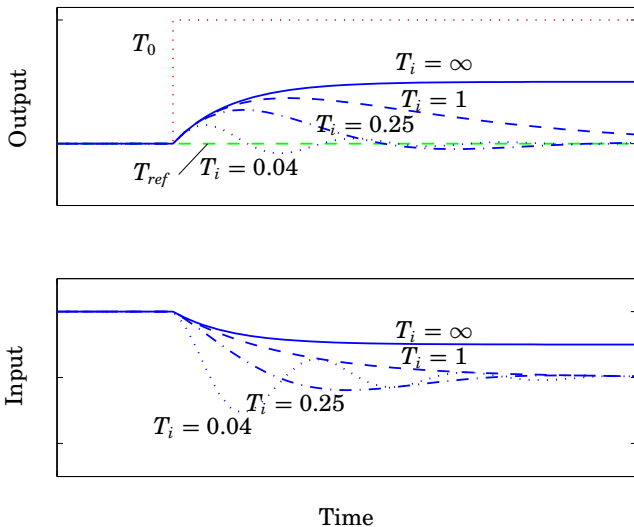
$$T(s) = \frac{K_1 K (sT_i + 1)}{s^2 T_1 T_i + s(K_1 K + 1)T_i + K_1 K} T_{ref}(s) \\ + \frac{sT_i}{s^2 T_1 T_i + s(K_1 K + 1)T_i + K_1 K} T_{in}(s)$$

As. stabilt om $K > -1/K_1$ och $KT_i > 0$

Stationärt: $T = T_{ref}$

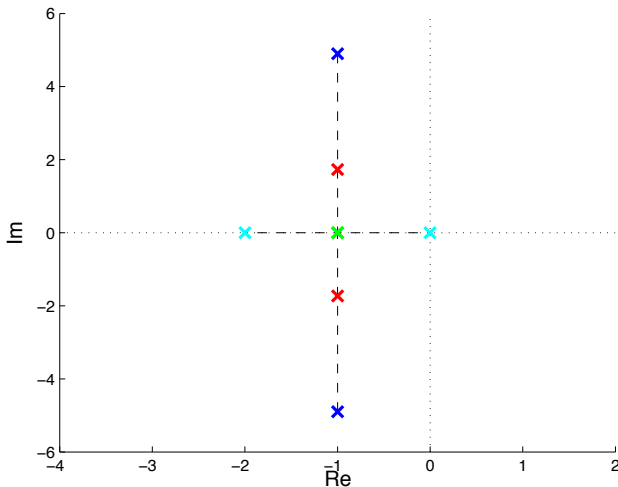
Simulering av stegstörning

Parametrar: $T_1 = K_1 = K = 1$:



Poler för återkopplat system

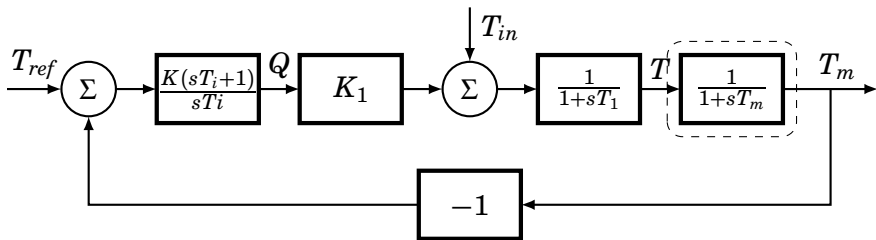
×: $T_i = 0.04$ ×: $T_i = 0.25$
×: $T_i = 1$ ×: $T_i = \infty$



Känslighet mot omodellerad dynamik

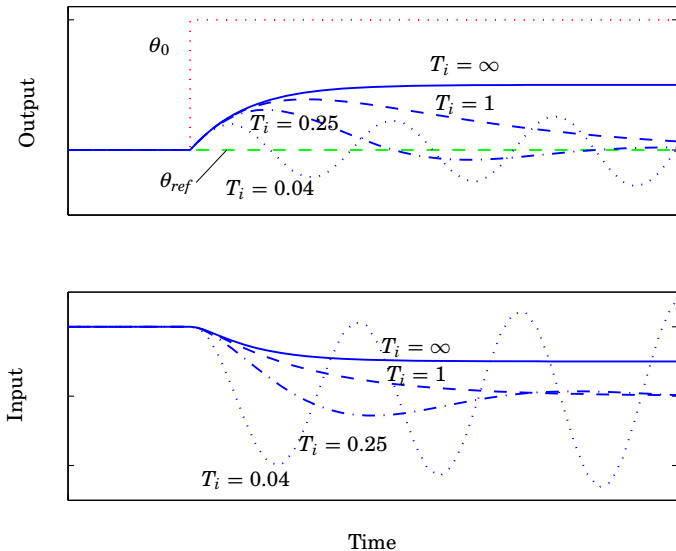
Antag mätdon med dynamik, $T_m(s) = \frac{1}{1 + sT_m}T(s)$

Vi får faktiskt slutet system:



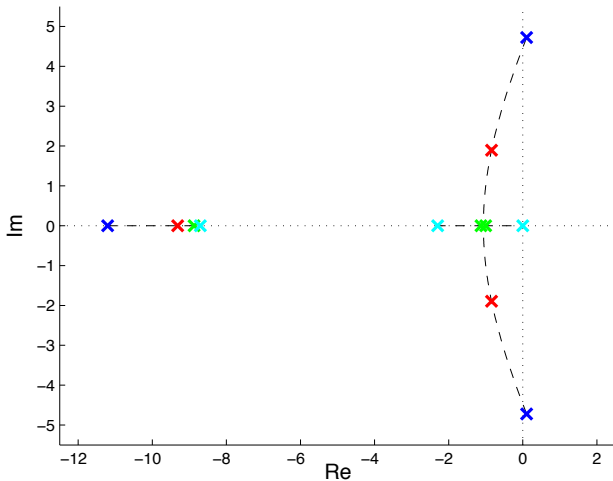
Simulering med omodellerad dynamik

Parametrar: $T_m = 0.1$, $T_1 = K_1 = K = 1$



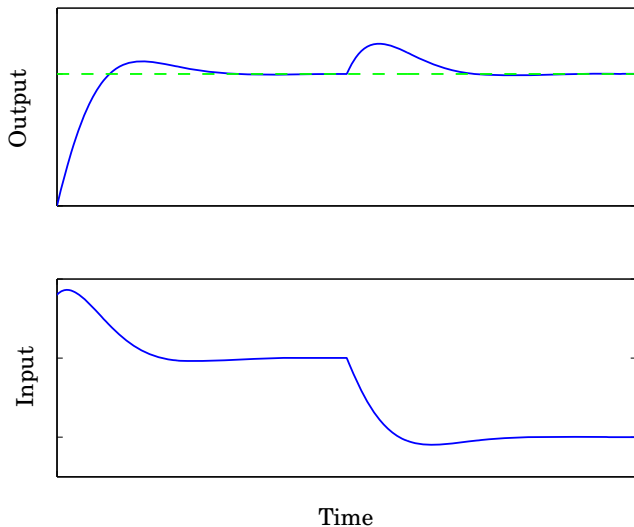
Poler för återkopplat system med mätdynamik

✕: $T_i = 0.04$ ✕: $T_i = 0.25$
✕: $T_i = 1$ ✕: $T_i = \infty$



Simulering av referensändring, laststörning

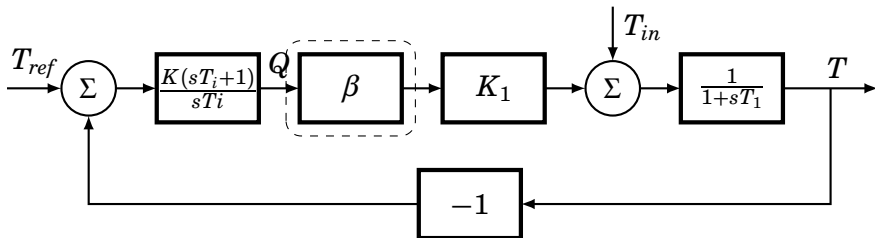
Parametrar: $T = K_1 = 1$, $K = 1.8$, $T_i = 0.45$:



Känslighet mot parametervariationer

Antag felmodellerad förstärkning för effekten Q

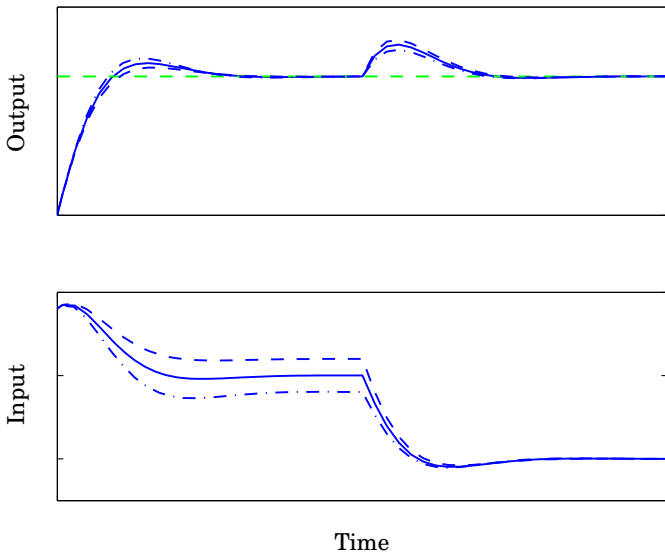
Vi har:



där $\beta = 0.8, 1.2$

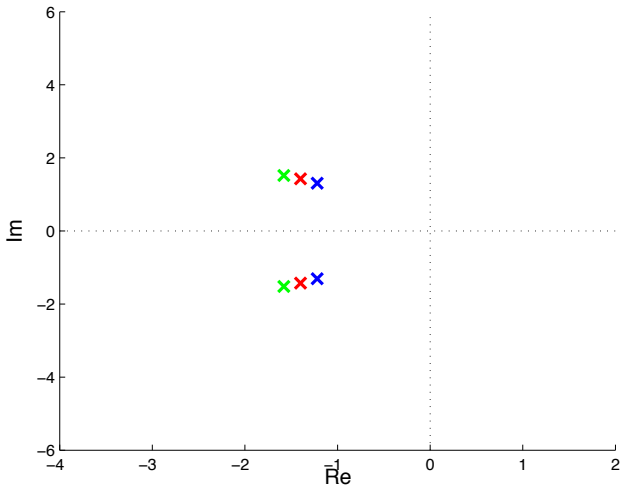
Simulering med fel effektförstärkning

Parametrar: $T = K_1 = 1$, $K = 1.8$, $T_i = 0.45$, $\pm 20\%$ ändring av Q



Poler för återkopplat system med fel förstärkning

×: $\beta = 0.8$ ×: $\beta = 1$ ×: $\beta = 1.2$



Slutsatser från exemplet

- ▶ Vi kan förändra systemets dynamik med återkoppling
 - ▶ Polplacering: Välj regulatorparametrarna så att polerna hamnar på lämpliga ställen
 - ▶ Stabilt, väldämpat, lagom snabbt
- ▶ Under vissa förutsättningar får man ett kvarstående fel
 - ▶ Vad kan man säga allmänt om stationära fel? – F7
- ▶ Omodellerad dynamik och parametervariationer påverkar beteendet
 - ▶ Hur kan man analysera slutna systemets känslighet? – F7