

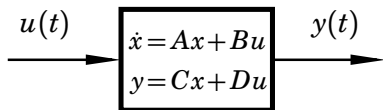
Systemteknik/Processreglering Föreläsning 5

- ▶ Impuls- och stegsvar
- ▶ Samband mellan överföringsfunktion och stegsvar
- ▶ Olinjära system

Läsanvisning: *Process Control*: 4.5–4.6, 5.1–5.4

LTI-system – repetition (F3–F4)

Tillståndsmodell

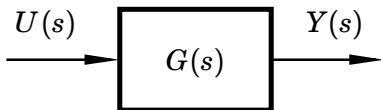


Systemsvar:

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{At}x(0) \\ &+ \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Stabilitet avgörs av A :s egenvärden

Insignal-utsignal-modell



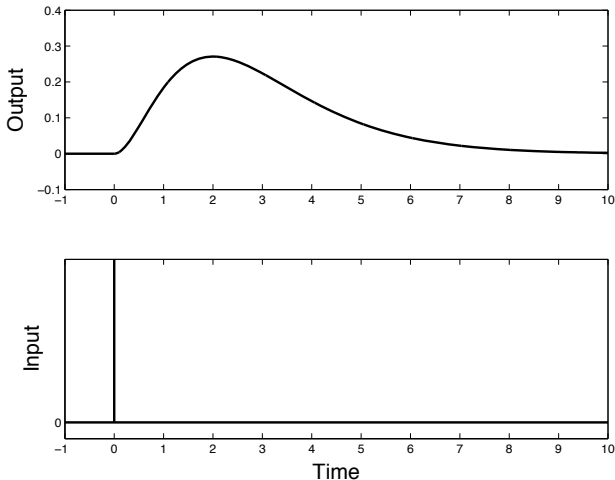
Systemsvar:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

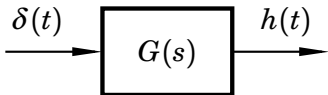
Stabilitet avgörs av $G(s)$:s poler

Impulssvar

Antag systemet i jämvikt. Hur reagerar utsignalen om insignalen ändras i form av en impuls (Diracfunktion)?



Impulssvar för linjära system



1. Laplace-transformera insignalen: $U(s) = 1$
2. Utsignalen blir

$$H(s) = G(s)U(s) = G(s)$$

3. Inverstransformering ger impulssvaret

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

$h(t)$ kallas även viktfunktion

Impulssvar för linjära system

För ett system givet på tillståndsform blir impulssvaret

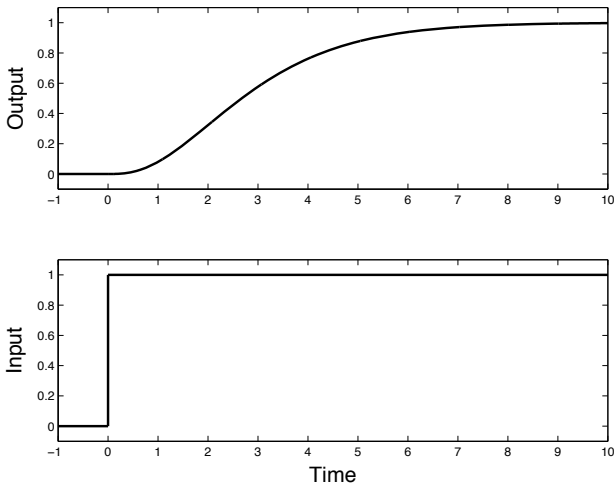
$$h(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$$

Stabilitetsbegrepp (igen):

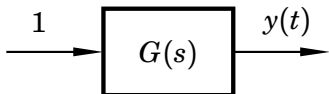
- ▶ $h(t)$ begränsad (utom ev. vid $t = 0$) $\Leftrightarrow$ stabilt system
- ▶ $h(t) \rightarrow 0$ $\Leftrightarrow$ asymptotiskt stabilt system
- ▶ $h(t)$ obegränsad $\Leftrightarrow$ instabilt system

Stegsvar

Antag systemet i jämvikt. Hur reagerar utsignalen om insignalen ändras i form av ett enhetssteg?



Stegsvar för linjära system



1. Laplace-transformera insignalen: $U(s) = \frac{1}{s}$
2. Utsignalen blir

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\frac{1}{s}$$

3. Inverstransformering ger stegsvaret

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ G(s)\frac{1}{s} \right\} = \int_0^t h(\tau) d\tau$$

(Stegsvaret är integralen av impulssvaret)

Statisk förstärkning

Stegsvarets slutvärde kallas systemets **statiska förstärkning** (*static gain*).

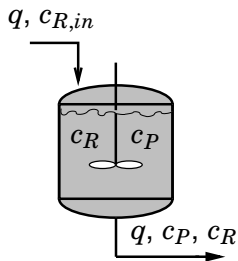
Kan beräknas med hjälp av slutvärdesteoremet:

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{1}{s} = G(0)$$

OBS! Stegsvarets slutvärde existerar bara för asymptotiskt stabila system!

Exempel: CSTR



- ▶ Volym V , flöde q
- ▶ Reaktion $R \rightarrow P$
- ▶ Reaktionshast. k

Överföringsfunktion från c_{RO} till c_P :

$$G(s) = \frac{\frac{q}{V}k}{(s + \frac{q}{V} + k)(s + \frac{q}{V})}$$

Statisk förstärkning:

$$G(0) = \frac{\frac{q}{V}k}{(\frac{q}{V} + k)\frac{q}{V}} = \frac{1}{\frac{q}{kV} + 1}$$

Tolkning: Om $c_{R,in}$ ökar med 1, ökar c_P med $\frac{1}{\frac{q}{kV} + 1}$ i jämvikt

Samband mellan överföringsfunktion och stegsvar

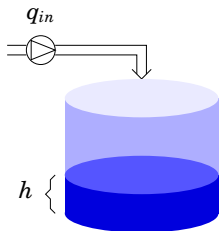
Typsystem:

- ▶ Integrator
- ▶ Första ordningens system
- ▶ Andra ordningens system med reella poler
- ▶ Andra ordningens system med komplexa poler
- ▶ System med ett nollställe
- ▶ System med tidsfördröjning

Integrerande system

$$G(s) = \frac{K}{s}$$

Exempel: tank utan fritt utflöde:



► Tvärsnittsarea: A

Överföringsfunktion från q_{in} till h :

$$G(s) = \frac{1/A}{s}$$

Integrerande system

Pol:

$$s = 0$$

Stegsvar:

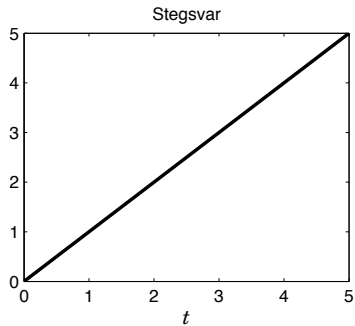
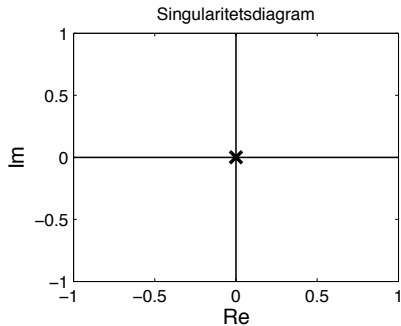
$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{K}{s^2}$$

$$y(t) = Kt$$

Inget slutvärde, eftersom systemet ej är asymptotiskt stabilt

Integrerande system

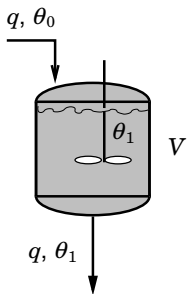
$K = 1$:



1:a ordningens system

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT}, \quad T > 0$$

Exempel: temperaturdynamik i en tank:



Överföringsfunktion från θ_0 till θ_1 :

$$G(s) = \frac{1}{1 + s\frac{V}{q}}$$

1:a ordningens system

Pol:

$$s = -1/T$$

Stegsvar:

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{K}{s(1 + sT)}$$

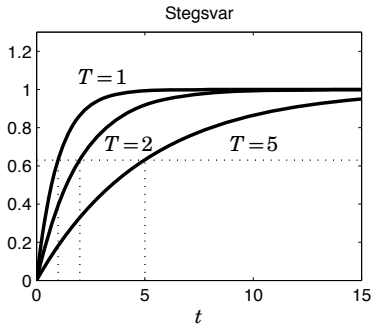
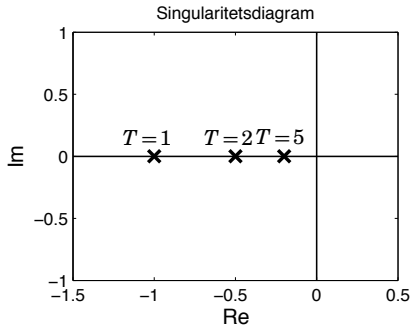
$$y(t) = K \left(1 - e^{-t/T} \right)$$

T kallas systemets **tidskonstant** (*time constant*)

$$y(T) = (1 - e^{-1})K \approx 0.63K$$

1:a ordningens system

$K = 1$:

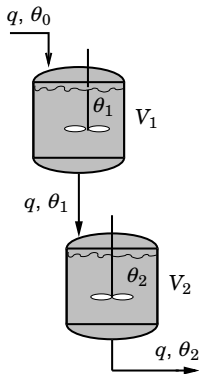


- Svarets snabbhet bestäms av polens avstånd från origo

2:a ordningens system med reella poler

$$G(s) = \frac{K}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}, \quad T_1, T_2 > 0$$

Exempel: temperaturdynamik i kopplade tankar:



Överföringsfunktion från θ_0 till θ_2 :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + s\frac{V_1}{q}\right)\left(1 + s\frac{V_2}{q}\right)}$$

2:a ordningens system med reella poler

Poler:

$$s = -1/T_1, \quad s = -1/T_2$$

Stegsvar:

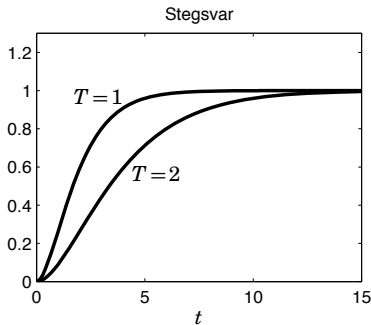
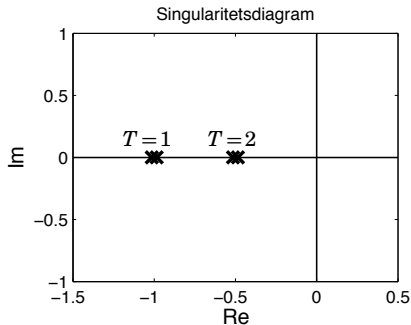
$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{K}{s(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$

$$y(t) = \begin{cases} K \left(1 - \frac{T_1 e^{-t/T_1} - T_2 e^{-t/T_2}}{T_1 - T_2} \right), & T_1 \neq T_2 \\ K \left(1 - e^{-t/T} - \frac{t}{T} e^{-t/T} \right), & T_1 = T_2 = T \end{cases}$$

Två tidskonstanter: T_1, T_2

2:a ordningens system med reella poler

$K = 1$:



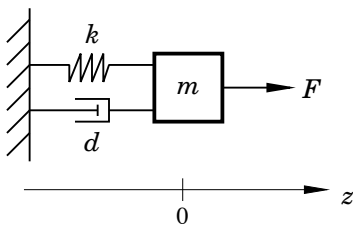
- ▶ Två poler ger mjukare och långsammare svar än en enkelpol
 - ▶ ekvivalent tidskonstant: $T_{eq} = T_1 + T_2$
- ▶ Om $T_1 \gg T_2$ så beter sig systemet i princip som ett 1:a ordningens system med tidskonstant T_1

2:a ordningens system med komplexa poler

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2}, \quad \omega_0 > 0, \quad 0 < \zeta < 1$$

- ▶ ω_0 = odämpad frekvens
- ▶ ζ = relativ dämpning

Exempel: positionsdynamik för mekaniskt system:



Överföringsfunktion från F till z :

$$G(s) = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{k}{m}}$$

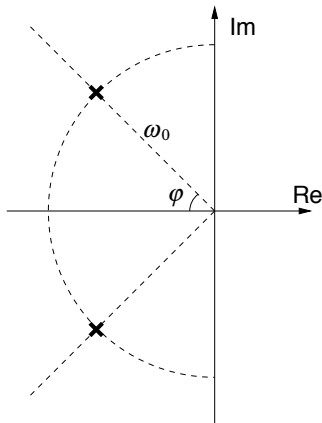
Komplexa poler om $d < 2\sqrt{km}$

2:a ordningens system med komplexa poler

Poler:

$$s = -\zeta \omega_0 \pm i \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_0$$

$$\zeta = \cos \varphi$$

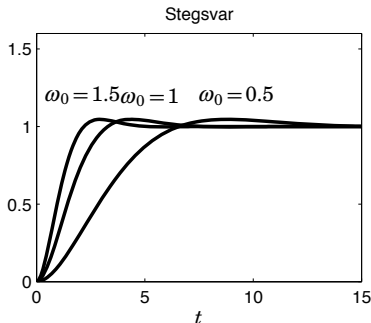
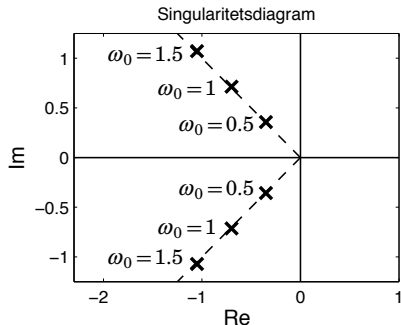


Stegsvar:

$$y(t) = K \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_0 t} \sin \left(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t + \arccos \zeta \right) \right)$$

2:a ordningens system med komplexa poler

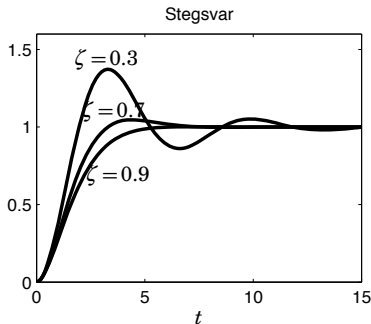
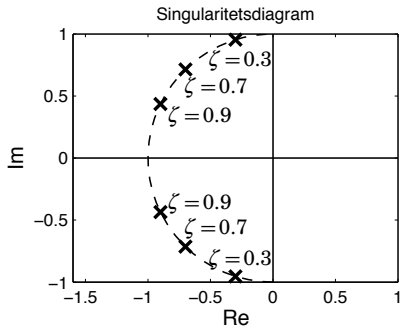
$K = 1$:



- Svarets snabbhet bestäms av polernas avstånd från origo

2:a ordningens system med komplexa poler

$K = 1$:



- Svarets dämpning bestäms av polernas vinkel

System med nollställe

Antag systemet

$$(1 + T_z s) G_0(s)$$

med ett nollställe i $s = -\frac{1}{T_z}$

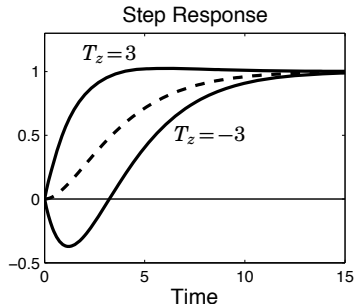
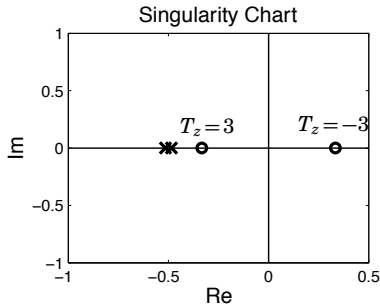
Stegsvar:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ G_0(s) \frac{1}{s} \right\} + T_z \mathcal{L}^{-1} \{ G_0(s) \}$$

- ▶ Viktad summa av stegsvaret och impulssvaret för $G_0(s)$
- ▶ Stor inverkan om nollstället nära origo

2:a ordningens system med nollställe

Exempel: $G(s) = \frac{1 + sT_z}{(1 + 2s)^2}$



Streckat stegsvar för $G_0(s) = \frac{1}{(1 + 2s)^2}$

- Nollstället påverkar initialbeteendet
- Nollställe i höger halvplan ger omvänt svar i början

System med tidsfördröjning

Antag systemet

$$G(s) = G_0(s)e^{-sL}, \quad L > 0$$

Stegsvar för dödtidsfria delen $G_0(s)$:

$$y_0(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ G_0(s) \frac{1}{s} \right\}$$

Stegsvar för systemet med tidsfördröjning:

$$y(t) = y_0(t - L)$$

- Observera att e^{-sL} kan inte tolkas i termer av (ett ändligt antal) poler och nollställen

Tolkning av poler och nollställen

Poler

- ▶ Beror bara på A -matrisen, d.v.s. på systemets inre dynamik
- ▶ Bestämmer systemets
 - ▶ stabilitet
 - ▶ snabbhet
 - ▶ dämpning

Nollställen

- ▶ Mer svårtolkade
- ▶ Beror på hur in- och utsignalen är kopplade till systemet, d.v.s. även på B , C och D -matrisen
- ▶ Ett nollställe i $s = a$ "släcker ut" signalen e^{at}
- ▶ Inverkar främst på systemsvarets initialbeteende

Svårstyrda processer

Sådana med

- ▶ Pol i höger halvplan (instabilt)
 - ▶ Ju större realdel (> 0) desto mer svårstyrt
- ▶ Nollställe i höger halvplan (omvänt svar i början)
 - ▶ Ju mindre realdel (> 0) desto mer svårstyrt
- ▶ Tidsfördröjning (fördröjt svar)
 - ▶ Ju längre tidsfördröjning desto mer svårstyrt

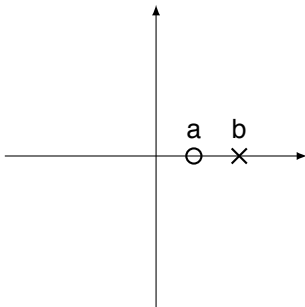
Ostyrbara processer

System med både pol och nollställe i höger halvplan ($a, b > 0$):

$$G(s) = \frac{Q(s)(s - a)}{P(s)(s - b)}$$

Om $a = b$: omöjligt att styra

Om $a \leq 3b$: omöjligt att styra i praktiken



Exempel

Bakhjulsstyrd cykel
 $a/b \approx 0.7$ vid 1 m/s



X29, $a/b \approx 4.33$

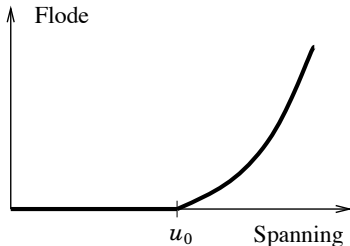
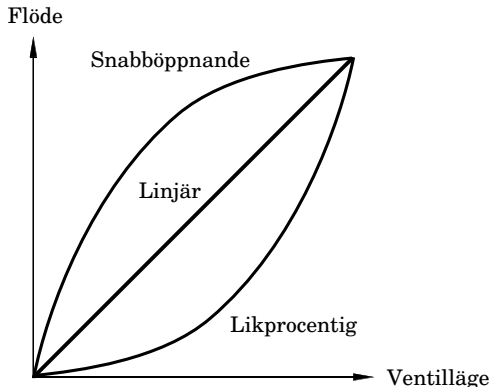


Olinjära system

Olika sorters olinjäriteter:

- ▶ Olinjäriteter i ställdon och mätdon, t.ex.
 - ▶ övre och nedre begränsningar på styr- och mätsignaler
 - ▶ pumpar och ventiler med olinjär karaktäristik
 - ▶ friktion och glapp
 - ▶ olinjära givare för temperatur, flöde, koncentration
- ▶ Olinjär dynamik i processen, t.ex.
 - ▶ höjdberoende utflödes hastighet i en tank
 - ▶ temperaturberoende reaktionshastighet i en reaktor
 - ▶ populationsberoende tillväxthastighet
- ▶ Olinjäriteter i regulatorn, t.ex.
 - ▶ av/på-reglering

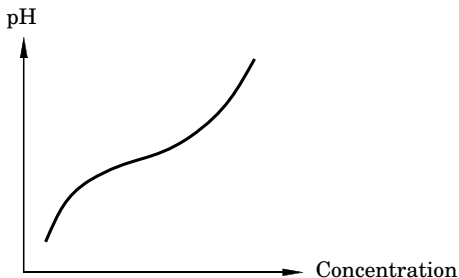
Exempel: Ventil- och pumpkaraktärstiker



- Kan kompenseras för med tabell/matematisk funktion eller (bättre) lokal återkoppling

Exempel: pH-reglering

Vill reglera pH men mäter koncentration:

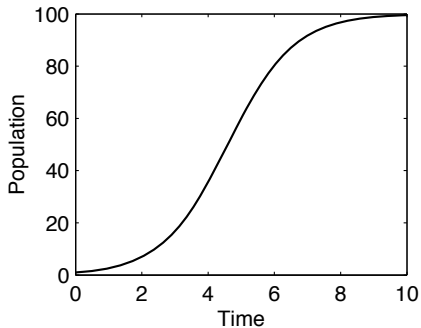


- Kan kompenseras för med tabell/matematisk funktion

Exempel: Logistisk tillväxtmodell

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right)$$

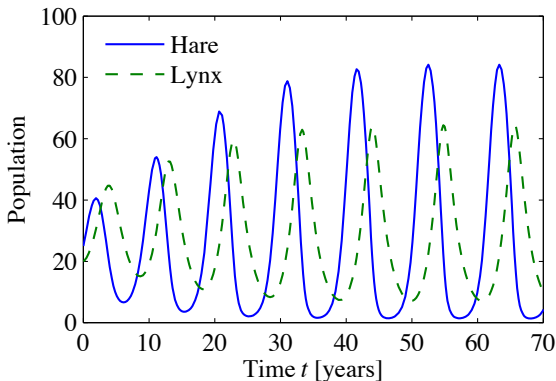
x = population, r = net growth rate, k = carrying capacity



Exempel: Harar och lodjur

$$\frac{dH}{dt} = rH \left(1 - \frac{H}{k} \right) - \frac{aHL}{c + H}, \quad H \geq 0,$$

$$\frac{dL}{dt} = b \frac{aHL}{c + H} - dL, \quad L \geq 0$$



Linjära kontra olinjära system

Linjära system

- ▶ kan ekvivalent beskrivas med linjär differentialekvation/tillståndsmodell, överföringsfunktion, impulssvar eller stegsvar
- ▶ har alltid jämviktspunkten $x = 0$
- ▶ global analys – polerna/egenvärdena avgör stabiliteten globalt

Olinjära system

- ▶ kan beskrivas med olinjär differentialekvation/tillståndsmodell
- ▶ kan ha många olika jämviktspunkter (stabila/instabila) och även uppvisa gränssvängningar
- ▶ simulering, lokal analys via linjärisering