

Systemteknik/Processreglering F4

Insignal-utsignal-modeller

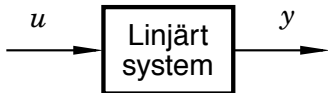
- ▶ Laplacetransformen
- ▶ Överföringsfunktion
- ▶ Blockdiagramräkning

Läsanvisning: *Process Control*: 4.1–4.4

Laplacetransformen

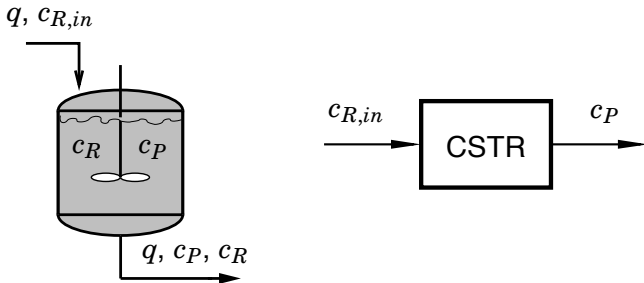
Ett kraftfullt matematiskt verktyg för att studera och lösa linjära differentialekvationer

T.ex.



Vad blir utsignalen $y(t)$ givet en viss insignal $u(t)$?

Exempel: CSTR



- ▶ Konstant volym V och flöde q
- ▶ Första ordningens reaktion $R \rightarrow P$
- ▶ Reaktionshastighet $r_R = -r_P = -kc_R$

Antag jämvikt. Hur svarar c_P om $c_{R,in}$ ändras som ett enhetssteg?

Exempel: CSTR

Materialbalans:

$$\text{In} + \text{Prod} = \text{Ut} + \text{Ack}$$

$$qc_{R,in} + Vr_R = qc_R + V \frac{dc_R}{dt}$$

$$Vr_P = qc_P + V \frac{dc_P}{dt}$$

Linjär andra ordningens tillståndsmodell:

$$\frac{dc_R}{dt} = - \left(\frac{q}{V} + k_1 \right) c_R + \frac{q}{V} c_{R,in}$$

$$\frac{dc_P}{dt} = k_1 c_R - \frac{q}{V} c_P$$

Hur lösa ekvationerna med Laplacetransformen?

Laplaceformen

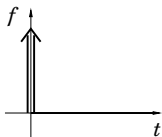
Omvandlar en funktion $f(t)$ till en annan funktion $F(s)$.

- ▶ $f(t)$ är en funktion av tiden $t \geq 0$
- ▶ $F(s)$ är en funktion av den "komplexa frekvensen" s

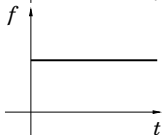
Definition:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

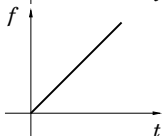
Några vanliga funktioner (signaler)



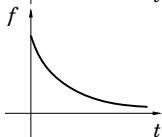
$$f(t) = \delta(t) \quad \text{Impuls}$$



$$f(t) = 1 \quad \text{Steg (konstant signal)}$$



$$f(t) = t \quad \text{Ramp}$$



$$f(t) = e^{-at} \quad \text{Exponentialfunktion}$$

Impulsfunktioner

- ▶ $\delta(t)$ = impuls vid tiden 0
- ▶ Kallas även Diracfunktion
- ▶ Oändligt hög och oändligt smal, men med arean 1

Exempel:

$$\frac{dV}{dt} = \delta(t)$$

Tolkning: “Injektion av en enhetsvolym vid tiden noll”

Laplacetransformen av några vanliga funktioner

Impuls:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 1$$

Steg:

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Exponentialfunktion:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

Utdrag ur formelsamlingen s. 6:

	Laplace transform $F(s)$	Tidsfunktion $f(t)$	
1	1	$\delta(t)$	Diracfunktion
2	$\frac{1}{s}$	1	Stegfunktion
3	$\frac{1}{s^2}$	t	Rampfunktion
$\vdots$			
6	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	

Några egenskaper hos Laplacetransformen

Utdrag ur formelsamlingen s. 5:

	Laplacetransform $F(s)$	Tidsfunktion $f(t)$	
1	$\alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$	$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$	Linjäritet
8	$sF(s) - f(0)$	$f'(t)$	Derivering i t -planet
12	$\frac{1}{s} F(s)$	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	Integration i t -planet

Fler användbara egenskaper

Utdrag ur formelsamlingen s. 5:

	Laplacetransform $F(s)$	Tidsfunktion $f(t)$	
3	$e^{-as} F(s)$	$\begin{cases} f(t-a) & t-a > 0 \\ 0 & t-a < 0 \end{cases}$	Tidsfördröjning
14	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	Slutvärdes- teoremet

Beräkna systemsvar med Laplacetransform

1. Laplace-transformera alla termer i diff.ekvationen
 - ▶ Använd formelsamlingen
2. Lös ut utsignalen $Y(s)$
3. Använd invers Laplace-transform för att hitta $y(t)$
 - ▶ Partialbråksuppdelning först om det behövs
 - ▶ Använd formelsamlingen

Exempel 1

Lös

$$\dot{y} = -3y$$

med initialvärdet $y(0) = 5$.

1. Laplacetransformera:

$$sY(s) - 5 = -3Y(s)$$

2. Lös ut $Y(s)$:

$$(s + 3)Y(s) = 5$$

$$Y(s) = \frac{5}{s + 3}$$

3. Invers Laplace (transform nr. 6):

$$y(t) = 5e^{-3t}$$

Exempel 2: CSTR

Antag $q = V = k = 1$, $c_R(0) = c_P(0) = 0$, $c_{R,in} = 1$ (stegfunktion):

$$\dot{c}_R = -2c_R + c_{R,in}$$

$$\dot{c}_P = c_R - c_P$$

1. Laplacetransformera:

$$sC_R(s) = -2C_R(s) + C_{R,in}(s)$$

$$sC_P(s) = C_R(s) - C_P(s)$$

2. Lös ut $C_P(s)$:

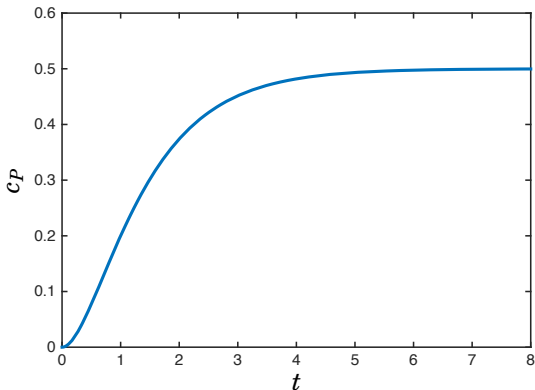
$$C_R(s) = \frac{1}{(s+2)} C_{R,in}(s)$$

$$C_P(s) = \frac{1}{s+1} C_R(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} C_{R,in}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)s}$$

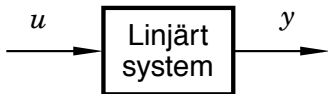
Exempel 2: CSTR

3. Invers Laplace (transform nr. 24):

$$c_P(t) = \frac{1}{2} \left(1 + e^{-2t} - 2e^{-t} \right)$$



Överföringsfunktion



Antag alla initialvärden noll. Efter Laplacetransformering kan insignal-utsignal-sambandet skrivas

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$G(s)$ kallas för systemets **överföringsfunktion** (*transfer function*)

Poler och nollställen

Överföringsfunktionen kan ofta skrivas som ett rationellt uttryck:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}, \quad \deg Q \leq \deg P$$

Nollställen (*zeros*): rötter till $Q(s) = 0$

Poler (*poles*): rötter till $P(s) = 0$ (karakteristisk ekvation)

Kan ritas i ett singularitetsdiagram/pol-nollställe-diagram

- ▶ Poler: x
- ▶ Nollställen: o

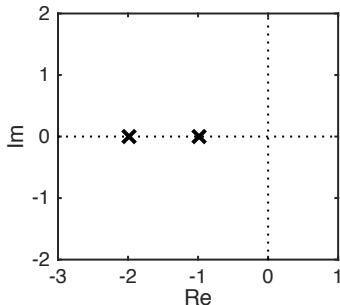
Exempel: CSTR

$$C_P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} C_{R,in}(s)$$

Överföringsfunktion: $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$

Nollställen: $1 = 0$ har inga lösningar

Poler: $(s+1)(s+2) = 0$ har lösningar $s_1 = -1$, $s_2 = -2$



Samband tillståndsform–överföringsfunktion

Linjärt tidsinvariant system på tillståndsform:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

Antag alla initialvärden noll: $x(0) = 0$

Laplacetransformera:

$$\begin{aligned}sX(s) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s)\end{aligned}$$

Samband tillståndsform–överföringsfunktion

Lös ut $X(s)$:

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Sätt in i ekvationen för $Y(s)$:

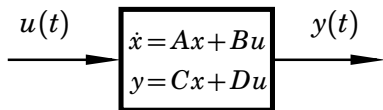
$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

$$= \underbrace{\left(C(sI - A)^{-1}B + D \right)}_{G(s)} U(s)$$

- ▶ $G(s)$ nämnare ges av $\det(sI - A)$
- ▶ Poler till $G(s) \Leftrightarrow$ egenvärden till A

Jämförelse

Tillståndsmodell

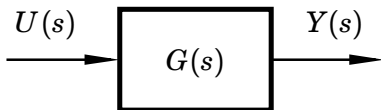


Systemsvar:

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{At}x(0) \\ &+ \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Stabilitet avgörs av A :s egenvärden

Insignal-utsignal-modell



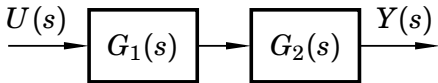
Systemsvar:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Stabilitet avgörs av $G(s)$:s poler

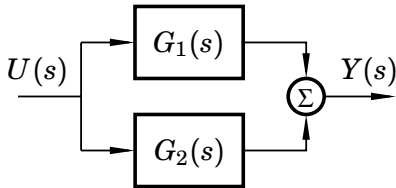
Blockdiagramräkning med överföringsfunktioner

Seriekoppling:



$$Y(s) = G_2(s)G_1(s)U(s)$$

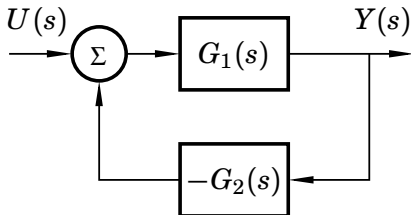
Parallellkoppling:



$$Y(s) = \left(G_1(s) + G_2(s) \right) U(s)$$

Blockdiagramräkning med överföringsfunktioner

Återkoppling:

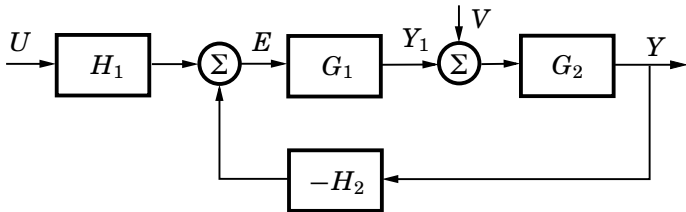


$$Y(s) = G_1(s) \left(U(s) - G_2(s)Y(s) \right)$$

$$Y(s) \left(1 + G_1(s)G_2(s) \right) = G_1(s)U(s)$$

$$Y(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1G_2(s)} U(s)$$

Exempel



Beräkna överföringsfunktionerna från U och V till Y .

$$Y = G_2(V + Y_1)$$

$$Y_1 = G_1 E$$

$$E = H_1 U - H_2 Y$$

Lös ut Y :

$$Y = \frac{G_2 G_1 H_1}{1 + G_2 G_1 H_2} U + \frac{G_2}{1 + G_2 G_1 H_2} V$$