

Systemteknik/Processreglering F3

- ▶ Matematisk modellering
- ▶ Tillståndsmodeller
- ▶ Stabilitet

Läsanvisning: *Process Control*: 3.1–3.4

Modellering av processer

Dynamiken i våra processer beskrivs typiskt av en eller flera differentialekvationer. Två olika angreppssätt:

1. Matematisk modellering

- ▶ Använd fysikens lagar (balansekvationer mm) för att ställa upp en modell

2. Experiment

- ▶ Utför experiment (t.ex. stegsvarsexperiment) på processen och analysera in- och ut-data
- ▶ FRT041 Systemidentifiering

I praktiken används ofta en kombination av båda sätten

Matematisk modellering

- ▶ Flödesbalanser
- ▶ Intensitetsbalanser
- ▶ Konstitutiva relationer

Flödesbalanser

T.ex.

- ▶ volymflöde [m^3/s]

$$\left[\begin{array}{c} \text{Ändring av} \\ \text{upplagrad volym} \\ \text{per tidsenhet} \end{array} \right] = [\text{Inflöde}] - [\text{Utflöde}]$$

- ▶ materialflöde [mol/s]

$$\left[\begin{array}{c} \text{Ändring av antalet} \\ \text{upplagrade partiklar} \\ \text{per tidsenhet} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Inflöde av} \\ \text{partiklar} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Utflöde av} \\ \text{partiklar} \end{array} \right]$$

Flödesbalanser

- energiflöde [W]

$$\left[\begin{array}{c} \textit{\text{Ändring av}} \\ \textit{upplagrad energi} \\ \textit{per tidsenhet} \end{array} \right] = [\textit{Effekt in}] - [\textit{Effekt ut}]$$

- strömflöde [A]

$$\left[\begin{array}{c} \textit{Summa ström in} \\ \textit{till knutpunkt} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \textit{Summa ström ut} \\ \textit{från knutpunkt} \end{array} \right]$$

Intensitetsbalanser

T.ex.

- kraftbalans [N]

$$\left[\begin{array}{c} \textit{\text{Ändring av}} \\ \textit{rörelsemängd} \\ \textit{per tidsenhet} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \textit{Drivande} \\ \textit{krafter} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \textit{Bromsande} \\ \textit{krafter} \end{array} \right]$$

- spänningsbalans [V]

$$\left[\textit{Summa spänning runt en krets} \right] = 0$$

Konstitutiva relationer

T.ex.

- ▶ Ideala gaslagen

$$p = \frac{nR}{V}T$$

- ▶ Torricellis lag

$$v = \sqrt{2gh}$$

- ▶ Energi i uppvärmd vätska

$$W = C_p \rho V T$$

- ▶ Ohms lag

$$u = Ri$$

Typiska balansekvationer för kemiprocesser

Total massbalans:

$$\frac{d\rho V}{dt} = \sum_{\substack{i=\text{all} \\ \text{inlets}}} \rho_i q_i - \sum_{\substack{i=\text{all} \\ \text{outlets}}} \rho_i q_i$$

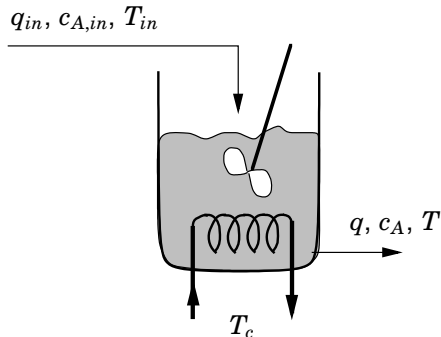
Massbalans för komponent j :

$$\frac{dc_j V}{dt} = \sum_{\substack{i=\text{all} \\ \text{inlets}}} c_{j,i} q_i - \sum_{\substack{i=\text{all} \\ \text{outlets}}} c_{j,i} q_i + r_j V$$

Total energibalans:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{\substack{i=\text{all} \\ \text{inlets}}} \rho_i V_i H_i - \sum_{\substack{i=\text{all} \\ \text{outlets}}} \rho_i V_i H_i + \sum_{\substack{k=\text{all phase} \\ \text{boundaries}}} Q_k + W$$

Exempel: CSTR med exoterm reaktion



- ▶ Exoterm reaktion $A \rightarrow B$, $r = k_0 e^{-E/RT} c_A$
- ▶ Kylslinga med temperatur T_c
- ▶ Perfekt omrörning, konstant densitet ρ

Exempel: CSTR med exoterm reaktion

Total massbalans:

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \rho q_{in} - \rho q$$

Massbalans för komponent A:

$$\frac{d(c_A V)}{dt} = c_{A,in} q_{in} - c_A q - r V$$

Total energibalans:

$$\rho V C_p \frac{dT}{dt} = \rho C_p q_{in} (T_{in} - T) + (-\Delta H_r) r V + U A (T_c - T)$$

Exempel: CSTR med exoterm reaktion

Efter förenklingar:

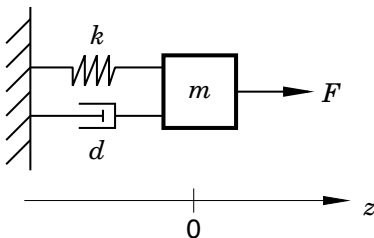
$$\frac{dV}{dt} = q_{in} - q$$

$$\frac{dc_A}{dt} = \frac{q_{in}}{V}(c_{A,in} - c_A) - k_0 e^{-E/RT} c_A$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q_{in}}{V}(T_{in} - T) + \frac{(-\Delta H_r)k_0}{\rho C_p} e^{-E/RT} c_A + \frac{UA}{V\rho C_p}(T_c - T)$$

- ▶ Olinjär tredje ordningens modell
- ▶ Tillståndsvariabler: V, c_A, T
- ▶ Möjliga insignaler: $q_{in}, q, c_{A,in}, T_{in}, T_c$
- ▶ Konstanta parametrar: $\rho, C_p, (-\Delta H_r), k_0, E, R, U, A$

Exempel: mekaniskt system



- ▶ Massa m med position z
- ▶ Yttre kraft: F
- ▶ Fjäderkraft: $F_k = -kz$
- ▶ Dämparkraft: $F_d = -d\dot{z}$

Exempel: mekaniskt system

Kraftbalans:

$$m\ddot{z} = F - kz - d\dot{z}$$

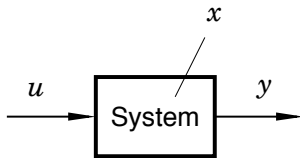
Inför $v = \dot{z} \Rightarrow$

$$\dot{v} = -\frac{d}{m}v - \frac{k}{m}z + \frac{1}{m}F$$

$$\dot{z} = v$$

- ▶ Linjär andra ordningens modell
- ▶ Tillståndsvariabler v, z
- ▶ Insignal: F
- ▶ Konstanta parametrar: m, k, d

Tillståndsformen



Generellt är x , u och y vektorer:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

n = antal tillståndsvariabler = systemets ordningstal

m = antal insignaler, p = antal utsignaler

Tillståndsformen

x kallas systemets tillstånd (*state*) och innehåller värdet av alla ackumulerade storheter i systemet (systemets "minne")

Systemets dynamik beskrivs av n första ordningens ordinära differentialekvationer:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)\end{aligned}$$

Tillståndsformen

Utsignalerna ges av p algebraiska ekvationer (anges inte alltid):

$$y_1 = g_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)$$

$$\vdots$$

$$y_p = g_p(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)$$

Systemet kan skrivas på vektorform som

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad (\text{tillståndsekvation})$$

$$y = g(x, u) \quad (\text{mätekvation})$$

- f och g kan vara olinjära funktioner

Tillståndsformen för linjära system

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m$$

$$y_1 = c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + \dots + d_{1m}u_m$$

$$\vdots$$

$$y_p = c_{p1}x_1 + \dots + c_{pn}x_n + d_{p1}u_1 + \dots + d_{pm}u_m$$

Tillståndsformen för linjära system

På matrisform:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (\text{tillståndsekvation})$$

$$y = Cx + Du \quad (\text{mätekvation})$$

- ▶ x och u anger avvikelser från en jämviktspunkt
- ▶ $(x, u) = (0, 0)$ är alltid en jämviktslösning
- ▶ D kallas systemets direktterm och är ofta 0 för verkliga processer

Miniproblem: Vilka dimensioner har matriserna A , B , C och D ?

Exempel: mekaniska systemet

Tillståndsvektor: $x = \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}$

Vi styr $u = F$ och mäter $y = z$

Modellen skriven på tillståndsform med matriser blir

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{d}{m} & -\frac{k}{m} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{pmatrix}}_B u$$

$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}_C x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}}_D u$$

Exempel: compartmentmodeller

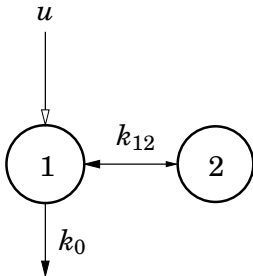
- ▶ Erik Widmark modellerade spridningen av alkohol i kroppen, 1922
- ▶ Torsten Teorell myntade begreppet “compartment model”, 1936
- ▶ Compartmentmodeller krävs av FDA för att godkänna nya läkemedel



Exempel: compartmentmodell

- ▶ Systemet består av förbundna avdelningar (*compartments*)
- ▶ En tillståndsvariabel för varje avdelning representerar massan eller koncentrationen av det studerade ämnet
- ▶ Transporthastigheterna är proportionella mot koncentrationsskillnaderna

Exempel med två avdelningar:



Exempel: compartmentmodell

Inför tillståndsvariablerna

c_1 = koncentrationen i avdelning 1

c_2 = koncentrationen i avdelning 2

Dynamiken ges då av

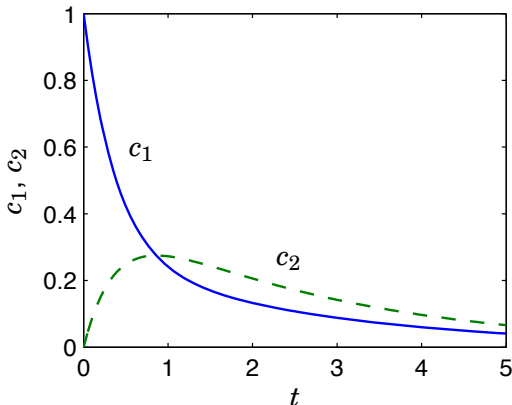
$$V_1 \frac{dc_1}{dt} = k_{12}(c_2 - c_1) - k_0 c_1 + u$$

$$V_2 \frac{dc_2}{dt} = k_{12}(c_1 - c_2)$$

Exempel: compartmentmodell

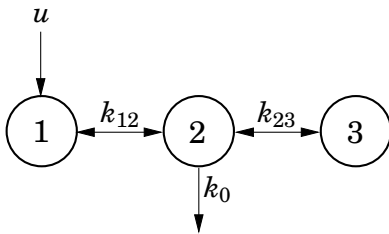
Antag $V_1 = V_2 = k_{12} = k_0 = 1$ och att systemet är i vila,
 $c_1(0) = c_2(0) = 0$.

Svar vid injektion av enhetsvolym vid tiden 0 ("impulssvar"):



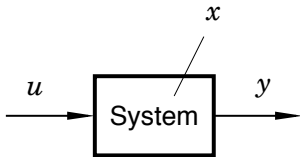
Inlämningsuppgift 1

Compartmentsystem med tre avdelningar:



- MATLAB med Control System Toolbox

Lösning av den linjära tillståndsekvationen



$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Hur svarar tillståndet x (och utsignalen y) på signalen u och initialtillståndet $x(0)$?

Lösning av tillståndsekvationen – skalära fallet

System med en tillståndsvariabel och en insignal:

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bu(t)$$

Lösning:

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau) d\tau$$

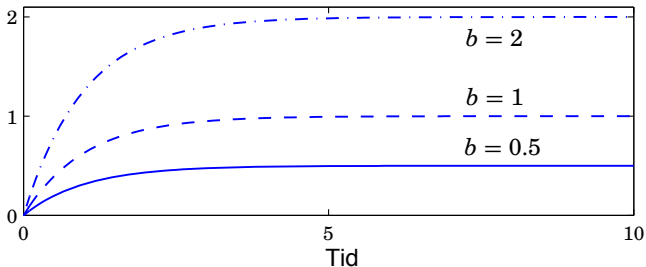
Exempel: Konstant insignal $u(t) = u_0$ och $a \neq 0$:

$$x(t) = e^{at}x(0) + \frac{b}{a}(e^{at} - 1)u_0$$

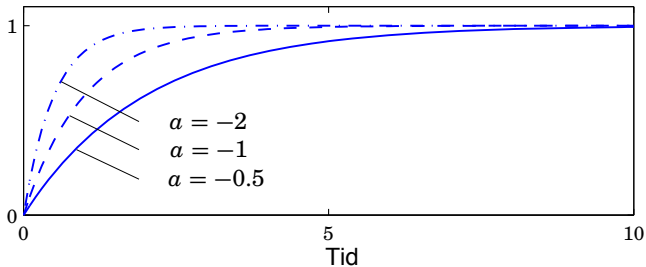
$x(t)$ begränsad om $a < 0$

Simulering med $u(t) = 1$ och $x(0) = 0$

$x(t)$ för $a = -1$, $b = 0.5, 1, 2$



$x(t)$ för $a = -0.5, -1, -2$, om $b/a = -1$



Lösning av tillståndsekvationen – allmänna fallet

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau$$

där e^{At} är matrisexponentialfunktionen, definierad som

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$$

Exempel: Mekaniska systemet

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{m} & -\frac{k}{m} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

Antag: Ingen dämpning ($d = 0$), ingen yttre kraft ($F = u = 0$),
initialvillkor $x(0) = [v(0) \ z(0)]^T = [0 \ 1]^T$, $m = k = 1$:

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A x$$

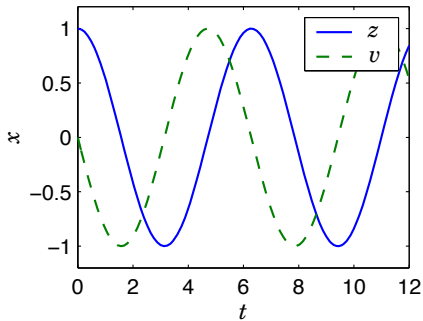
Exponentialmatris:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Ger lösningen

$$x(t) = e^{At}x(0) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Simulering av mekaniska systemet



Eigenvärden

A :s eigenvärden ges av de n rötterna till den karakteristiska ekvationen

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$\det(\lambda I - A) = P(\lambda)$ kallas karakteristiskt polynom

Eigenvärdena kan vara komplexa (komplexkonjugerade)

Multiplicitet av egenvärde = antal eigenvärden med samma värde

Eigenvärden

Antag diagonal A -matris med eigenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Då

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Varje eigenvärde λ_i ger en term $e^{\lambda_i t}$ i lösningen

Eigenvärden

För en generell A -matris ger varje egenvärde en term $P_{m_i-1}(t)e^{\lambda_i t}$ i e^{At} där

- ▶ $P_{m_i-1}(t)$ är ett polynom i t av högst gradtal $m_i - 1$
- ▶ m_i är egenvärdets multiplicitet

Exempel:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Eigenvärden:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \quad (m = 2)$$

Exponentialmatris:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Stabilitet för linjära system

Stabilitet är en inneboende systemegenskap – beror ej på hur insignalen ser ut

Vi kan studera det fria systemet

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

Lösning:

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

Stabilitetsbegrepp

Asymptotisk stabilitet: $x(t) \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$ för alla initialvärden

Stabilitet: $x(t)$ begränsad då $t \rightarrow \infty$ för alla initialvärden

Instabilitet: $x(t)$ obegränsad då $t \rightarrow \infty$ för något initialvärde

(Stabila men ej asymptotiskt stabila system kallas **marginellt stabila**)

Exempel

Asymptotiskt stabila system:

- ▶ Vattentank med hål i botten
- ▶ Temperaturen i en ugn
- ▶ Hastigheten i en bil

Stabila system:

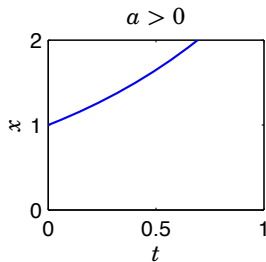
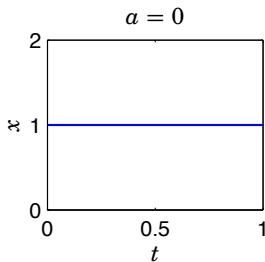
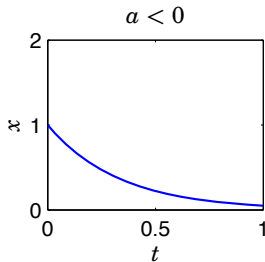
- ▶ Vattentank utan hål i botten
- ▶ Massa–fjäder-system utan dämpning
- ▶ Tillryggalagd sträcka i en bil

Instabila system:

- ▶ Pendel i inverterat läge
- ▶ Segway

Stabilitet i det skalära fallet

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$$
$$x(t) = e^{at}x(0)$$



- ▶ asymptotiskt stabilt om $a < 0$
- ▶ stabilt om $a \leq 0$
- ▶ instabilt om $a > 0$

Stabilitet i det allmänna fallet

Egenvärdena λ_i till A -matrisen avgör stabiliteten.

Ett linjärt system är:

- ▶ Asymptotiskt stabilt om alla $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$
- ▶ Instabilt om något $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$
- ▶ Stabilt om alla $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ och eventuella egenvärden på imaginära axeln har multiplicitet 1

Routh–Hurwitz stabilitetskriterium

2:a ordningens karakteristiskt polynom (för 2×2 -matris A):

$$\det(\lambda I - A) = P(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2$$

Alla rötter ligger i vänster halvplan (alltså alla $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$) om och endast om $p_1 > 0$ och $p_2 > 0$

3:e ordningens karakteristiskt polynom (för 3×3 -matris A):

$$\det(\lambda I - A) = P(\lambda) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3$$

Alla rötter ligger i vänster halvplan (alltså alla $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$) om och endast om $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $p_3 > 0$ och $p_1p_2 > p_3$.

Exempel: mekaniska systemet

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{m} & -\frac{k}{m} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

Karakteristisk ekvation:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{d}{m} & \frac{k}{m} \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{d}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

Antag $m, k, d > 0$: Asymptotiskt stabilt

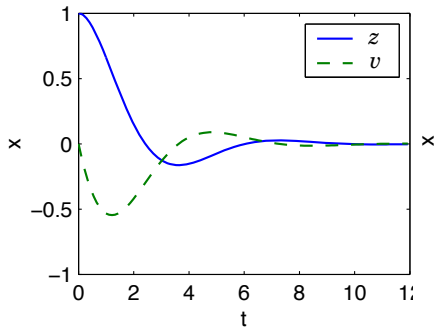
Antag $m, k > 0, d = 0$: Vi får egenvärden

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}$$

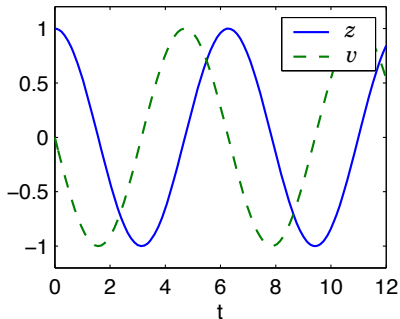
Alltså är systemet stabilt (men ej asymptotiskt stabilt)

Simulering av mekaniska systemet

$m = k = d = 1$:



$m = k = 1, d = 0$:



Linjära system på tillståndsform i MATLAB

```
% Definiera systemmatriser
```

```
A = [1 2; 3 4];
```

```
B = [0; 1];
```

```
C = [1 0];
```

```
D = 0;
```

```
% Skapa tillståndsmodell
```

```
sys = ss(A,B,C,D);
```

```
% Beräkna egenvärden till A-matrisen
```

```
eig(A)
```

```
% Simulera systemet utan insignal från ett
```

```
% visst initialvärde
```

```
initial(sys,x0)
```