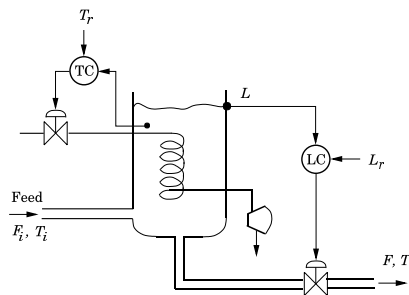


Multivariabel reglering

- Flera in- och utsignaler
- Stabilitet och interaktion
- Para ihop in- och utsignaler (RGA)
- Eliminera interaktion (särkoppling)

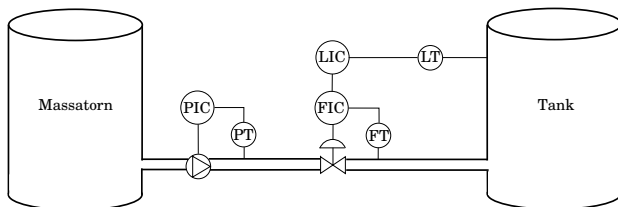
Läsanvisning: *Process Control*: 10.1–10.4

Exempel 2: Nivå och temperatur i tank



- Nivån påverkar temperaturen
- Temperaturen påverkar ej nivån

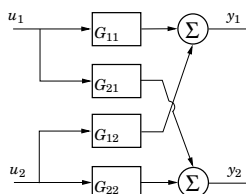
Exempel 4: Tryck och flöde i transportrör



Trycket i röret ska hållas konstant, medan det önskade flödet bestäms av tankens nivåregulator

- Tryckregleringen påverkar flödet
- Flödesregleringen påverkar trycket

Blockschema, t.ex.:

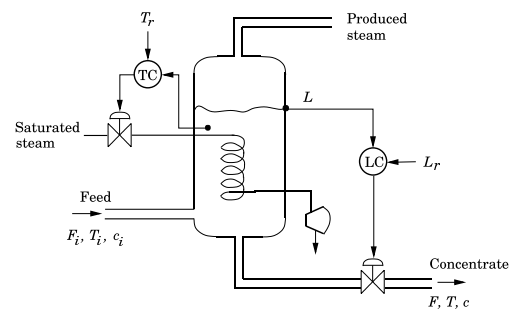


Exempel 1: Flöde och temperatur i dusch



- Styrsignaler: kallvattenflöde, varmvattenflöde
- Mätsignaler: totalt vattenflöde, temperatur
- Båda styrsignalerna påverkar båda mätsignalerna

Exempel 3: Nivå och temperatur i indunstare



- Nivån påverkar temperaturen
- Temperaturen påverkar nivån

Multivariabla systembeskrivningar

Tillståndsbeskrivning:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

Överföringsmatris, t.ex.:

$$Y(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} U(s) = G(s)U(s)$$

Samband: $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

Exempel: Duschen

$$\begin{bmatrix} y_{\text{flow}} \\ y_{\text{temp}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -e^{-s} & e^{-s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\text{cold}} \\ u_{\text{hot}} \end{bmatrix}$$

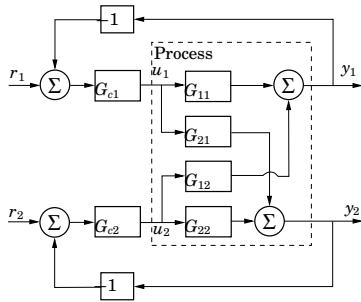
Exempel: Transportröret

$$\begin{bmatrix} y_{\text{pres}} \\ y_{\text{flow}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.018e^{-2s}}{0.42s + 1} & \frac{-0.02e^{-1.4s}}{12e^{-4s}} \\ \frac{4.1e^{-2.64s}}{3s + 1} & \frac{0.9s + 1}{3s + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\text{pump}} \\ u_{\text{valve}} \end{bmatrix}$$

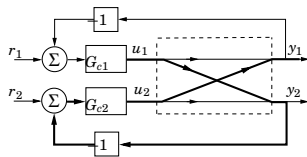
Stabilitet för multivariabla system

Varje krets, sluten för sig, kan vara stabil, men systemet kan ändå bli instabilt när flera kretsar sluts samtidigt!

Exempel:



Båda kretsarna slutna samtidigt:



Utsignalernas beroende av insignalerna r_1 och r_2 :

$$Y_1 = \frac{G_{11}G_{c1} + G_{c1}G_{c2}(G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})}{A}R_1 + \frac{G_{12}G_{c2}}{A}R_2$$

$$Y_2 = \frac{G_{21}G_{c1}}{A}R_1 + \frac{G_{22}G_{c2} + G_{c1}G_{c2}(G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})}{A}R_2$$

Stabiliteten bestäms av den karakteristiska ekvationen

$$A(s) = (1 + G_{11}G_{c1})(1 + G_{22}G_{c2}) - G_{12}G_{21}G_{c1}G_{c2} = 0$$

- Interaktionerna G_{12} och G_{21} kan förstöra stabiliteten

Stabilitet – exempel

$$G_p(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{0.1s+1} & \frac{5}{0.5s+1} \\ \frac{s+1}{2} & \frac{5K_2}{0.4s+1} \end{pmatrix}, \quad G_r(s) = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix}$$

Varje loop sluten för sig är stabil för alla $K_1, K_2 > 0$

$$\det(I + G_p(s)G_r(s)) = \det \begin{pmatrix} \frac{K_1}{0.1s+1} + 1 & \frac{5K_2}{0.5s+1} \\ \frac{s+1}{2} & \frac{2K_2}{0.4s+1} + 1 \end{pmatrix} = \frac{a(s)}{b(s)}$$

där

$$a(s) = 0.02s^4 + 0.1(3.1 + 2K_1 + K_2)s^3 + (1.29 + 1.1K_1 + 1.3K_2 + 0.8K_1K_2)s^2 + (2 + 1.9K_1 + 3.2K_2 + 0.5K_1K_2)s + (1 + K_1 + 2K_2 - 3K_1K_2) = 0$$

Sista koefficienten negativ om $3K_1K_2 > 1 + K_1 + K_2 \Rightarrow$ instabilt

Normaliserad förstärkning

- Öppna systemets statiska förstärkning då $\Delta u_k = 0$, $k \neq j$

$$k_{ij} = G_{ij}(0) = \frac{\Delta y_i}{\Delta u_j}$$

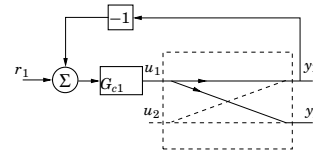
- Slutna systemets statiska förstärkning då $\Delta y_k = 0$, $k \neq i$ (antag "perfekt" reglering av de andra utsignalerna)

$$l_{ij} = \frac{\Delta y_i}{\Delta u_j}$$

- Relativa förstärkningen

$$\lambda_{ij} = \frac{k_{ij}}{l_{ij}}$$

Endast första kretsen sluten:



Utsignalernas beroende av insignalen r_1 :

$$Y_1 = \frac{G_{11}G_{c1}}{1 + G_{11}G_{c1}}R_1$$

$$Y_2 = G_{21}U_1 = \frac{G_{21}G_{c1}}{1 + G_{11}G_{c1}}R_1$$

Stabiliteten bestäms av den karakteristiska ekvationen

$$1 + G_{11}G_{c1} = 0$$

(Motsvarande samband för andra kretsen)

Stabilitet – allmänna fallet

Multivariabel process $G_p(s)$ och multivariabel regulator $G_r(s)$:

$$Y(s) = G_p(s)U(s)$$

$$U(s) = G_r(s)(R(s) - Y(s))$$

Återkopplat system:

$$Y(s) = G_p(s)G_r(s)(R(s) - Y(s))$$

Lös ut $Y(s)$:

$$Y(s) = (I + G_p(s)G_r(s))^{-1}G_p(s)G_r(s)R(s)$$

Karakteristisk ekvation:

$$A(s) = \det(I + G_p(s)G_r(s)) = 0$$

Slutna systemet stabilt om alla rötter i vänster halvplan

Relative Gain Array (RGA)

- Ett sätt att konstatera koppling i "kvadratiska" system (lika många insignaler som utsignaler)
- Baserat på den statiska förstärkningen $K = G(0)$
- Normalisering för att undvika skalningsproblem
- Vägledning för ihopparring av in- och utsignaler

RGA för 2×2 -system

Stationära förstärkningar för variationer i insignalerna

$$\Delta y_1 = k_{11}\Delta u_1 + k_{12}\Delta u_2$$

$$\Delta y_2 = k_{21}\Delta u_1 + k_{22}\Delta u_2$$

Antag nu att vi kan hålla $\Delta y_2 = 0$.

$$\Delta u_2 = -\frac{k_{21}}{k_{22}}\Delta u_1$$

$$\Delta y_1 = \left(k_{11} - \frac{k_{12}k_{21}}{k_{22}}\right)\Delta u_1 = \frac{\det K}{k_{22}}\Delta u_1 = -\frac{\det K}{k_{21}}\Delta u_2$$

Alltså $l_{11} = \frac{\Delta y_1}{\Delta u_1} = \frac{\det K}{k_{22}}$ och $l_{12} = -\frac{\det K}{k_{21}}$

Matrisen med elementen $1/l_{ij}$ ges därför av

$$\frac{1}{\det K} \begin{bmatrix} k_{22} & -k_{21} \\ -k_{12} & k_{11} \end{bmatrix} = (K^{-1})^T$$

RGA-matrisen Λ

RGA-matrisen Λ har elementen $\lambda_{ij} = k_{ij} \frac{1}{u_{ij}}$, dvs

$$\Lambda = K \cdot * (K^{-1})^T$$

OBS! ".*" är elementvis multiplikation

För Λ gäller

- Rad- och kolonnsumma

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{ij} = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} = 1$$

- Systemet lätt att reglera med enkretregulatorer om Λ är (nära) enhetsmatris (efter eventuella permutationer)
- Negativa element svarar mot besvärlig koppling

Exempel 2: 3×3 -system

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{2}{s+3} & \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{s+2}{s+1} & \frac{s+1}{s+2} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+2} \end{pmatrix}$$

RGA-beräkning:

$$G(0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Svår multivariabel interaktion

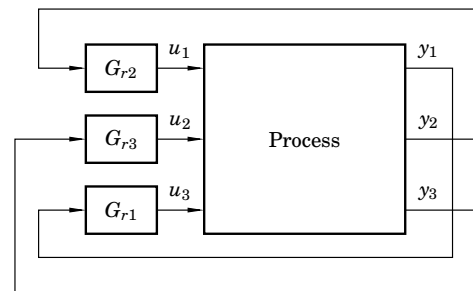
Kopplingsförslag: $u_1 - y_2$, $u_2 - y_3$, $u_3 - y_1$

Ihopparring av in- och utsignaler

Tumregel: In- och utsignaler ska paras så att motsvarande relativa förstärkning är positiv och så nära ett som möjligt.

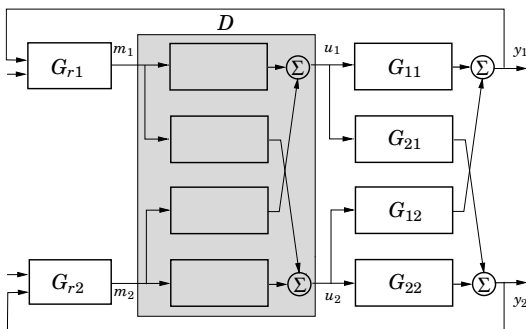
Exempel 1:

Λ	Parning	Interaktion
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$u_1 - y_1$ $u_2 - y_2$	Ingen
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$u_1 - y_2$ $u_2 - y_1$	Ingen
$\begin{bmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.15 & 0.85 \end{bmatrix}$	$u_1 - y_1$ $u_2 - y_2$	Svag
$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$	$u_1 - y_1$ $u_2 - y_2$	Svår



Särkoppling

Idé: Inför nya styrsignaler m och ett särkopplingsfilter $D(s)$ så att systemet blir lättare att styra



Utformning av särkopplingen

Ett val av särkoppling är följande:

$$D(s) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{G_{12}}{G_{11}} \\ -\frac{G_{21}}{G_{22}} & 1 \end{bmatrix}$$

(andra val av D ligger utanför kursen)

Detta val resulterar i följande särkopplade system:

$$T(s) = \begin{bmatrix} G_{11} - G_{12} \frac{G_{21}}{G_{22}} & 0 \\ 0 & G_{22} - G_{21} \frac{G_{12}}{G_{11}} \end{bmatrix}$$

Detta system kan nu regleras med två vanliga regulatorer

Utsignaler som funktion av de nya insignalerna:

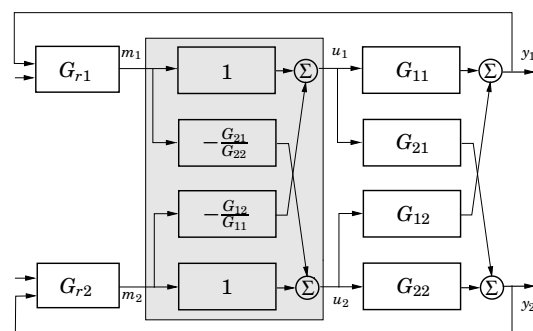
$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)D(s)M(s) = T(s)M(s)$$

där $T(s)$ väljs med önskade egenskaper

- Särkopplingsfilter: $D(s) = G(s)^{-1}T(s)$
- Välj $T(s)$ diagonal
- 2×2 -fallet:

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}, \quad D(s) = \frac{1}{\det G} \begin{bmatrix} G_{22}T_{11} & -G_{12}T_{22} \\ -G_{21}T_{11} & G_{11}T_{22} \end{bmatrix}$$

Tolkning:



Särkopplingselementen $-\frac{G_{12}}{G_{11}}$ och $-\frac{G_{21}}{G_{22}}$ är omöjliga att implementera om de innehåller

- ▶ rena derivator
- ▶ negativa tidsfördröjningar

Några lösningsalternativ:

- ▶ lågpassfiltrera
- ▶ använd bara den statiska förstärkningen
- ▶ sätt särkopplingselementet till 0

Process:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.018e^{-2s}}{3s+1} & \frac{-0.02e^{-1.4s}}{3s+1} \\ \frac{0.42s+1}{4.1e^{-2.64s}} & \frac{0.9s+1}{12e^{-4s}} \end{bmatrix}$$

RGA:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0.73 & 0.27 \\ 0.27 & 0.73 \end{bmatrix}$$

Slutsats: reglera trycket med pumpen och reglera flödet med ventilen, viss interaktion mellan looparna

Simulering med särkoppling (heldragen) och utan (streckad):

