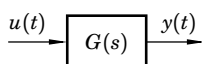


Frekvensanalys

- Frekvenssvar
- Bode- och Nyquistdiagram
- Stabilitet och stabilitetsmarginaler

Läsanvisning: *Process Control*: 6.1–6.5

Frekvenssvar



$$u(t) = \sin \omega t$$

$$y(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = |G(i\omega)|$$

$$\varphi = \arg G(i\omega)$$

$G(i\omega)$ – frekvensfunktion

$|G(i\omega)|$ – förstärkning (*gain*), amplitud, magnitud

$\arg G(i\omega)$ – fasförskjutning (*phase shift*), fas

Räkneregler för komplexa tal

$$z = x + iy$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\arg z = \arctan \frac{y}{x} \quad (\text{om } x > 0)$$

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

Bodediagram

Rita $|G(i\omega)|$ och $\arg G(i\omega)$ som funktioner av ω

- Amplitudkurvan $|G(i\omega)|$ ritas i log-log-skala
- Faskurvan $\arg G(i\omega)$ ritas i log-lin-skala

(MATLAB-kommando: `bode`)

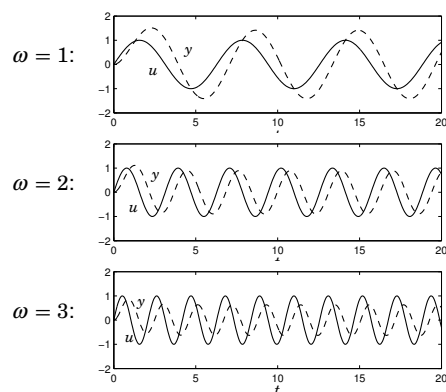
Studera hur system reagerar på signaler i olika frekvensområden

Exempel:

- Laststörningar – mest låga frekvenser
- Mätbrus – höga frekvenser

Om systemet är linjärt så kan man studera svaret för varje frekvens separat

- Sinus in $\Rightarrow$ sinus ut
- Kan t.ex. användas för att ta fram överföringsfunktioner experimentellt (systemidentifiering)

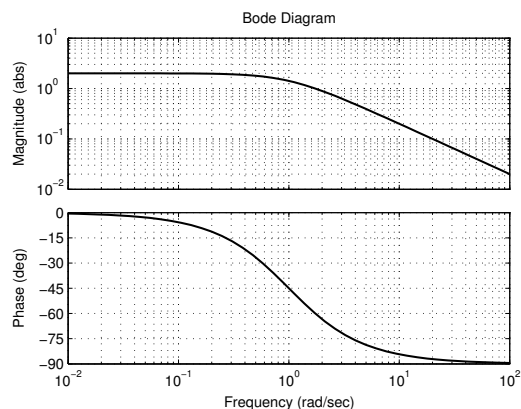
Exempel: $G(s) = \frac{2}{s+1}$ Exempel: $G(s) = \frac{2}{s+1}$

$$G(i\omega) = \frac{2}{i\omega + 1}$$

$$|G(i\omega)| = \frac{2}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$\arg G(i\omega) = -\arctan \omega$$

ω	$ G(i\omega) $	$\arg G(i\omega)$
0	2	0°
1	$\sqrt{2}$	-45°
∞	0	-90°

Exempel: $G(s) = \frac{2}{s+1}$ 

Miniproblem

Avläs i Bodediagrammet:

- ▶ Hur mycket förstärks och fasförskjuts insignaler med frekvensen 0.5 rad/s?
- ▶ Hur mycket förstärks och fasförskjuts insignaler med frekvensen 5 rad/s?

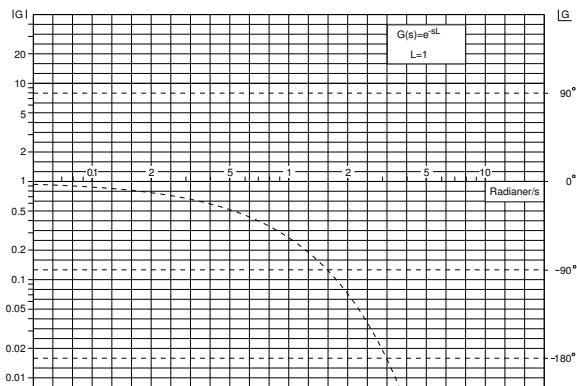
Typsystem i formelsamlingen

$$\frac{1}{1+sT}, \quad 1+sT \quad \text{reell pol, reellt nollställe}$$

$$e^{-sL} \quad \text{tidsfördröjning}$$

$$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2} \quad \text{komplext polpar}$$

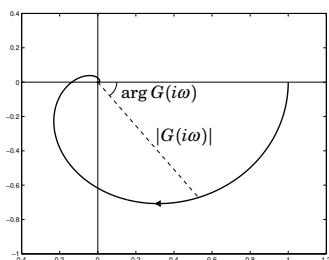
(Ni behöver ej kunna rita Bodediagram för hand, s. 77–81 i *Process Control*.)



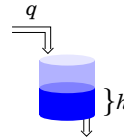
- ▶ En tidsfördröjning sänker faskurvan exponentiellt men påverkar inte amplitudkurvan

Nyquistdiagram

Rita kurvan $G(i\omega)$ i komplexa talplanet då ω går från 0 till ∞ .



Exempel: nivåreglering i tank



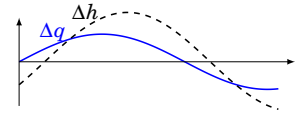
Modell (linjäriserad):

$$\Delta H(s) = \frac{K_1}{sT_1 + 1} \Delta Q(s)$$

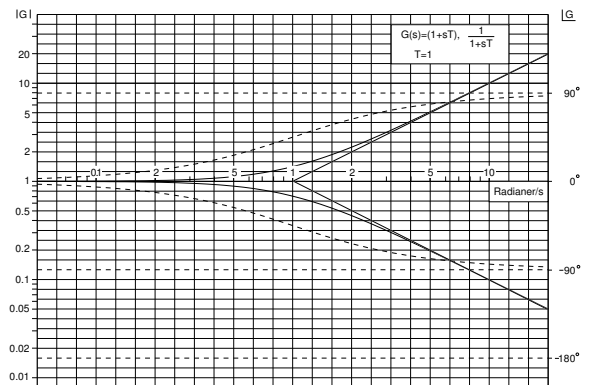
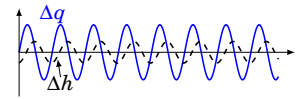
System konfigurerat så att $K_1 = 2, T_1 = 1 \Rightarrow$

$$\Delta H(s) = \frac{2}{s+1} \Delta Q(s)$$

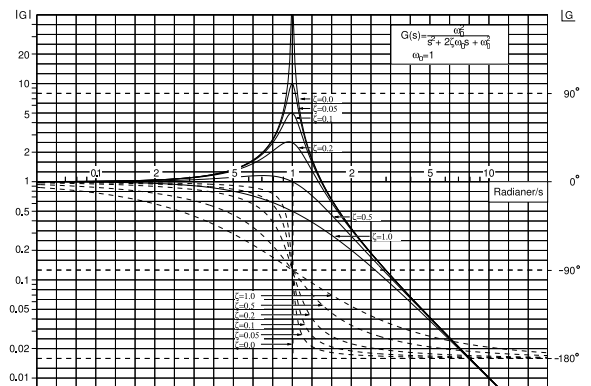
Inflöde $\Delta q(t) = \sin 0.5t$:



Inflöde $\Delta q(t) = \sin 5t$:

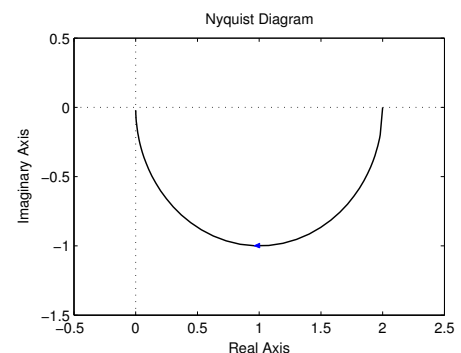


- ▶ En pol i $s = -\frac{1}{T}$ böjer ner amplitudkurvan och sänker faskurvan med 90° vid $\omega = \frac{1}{T}$; omvänt för ett nollställe

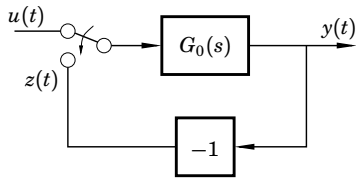


- ▶ Ett oscillerande system med liten dämpning ζ har en stor resonanstopp vid egenfrekvensen ω_0 i amplitudkurvan

Exempel: $G(s) = \frac{2}{s+1}$



Stabilitet för återkopplade system



Antag att öppna systemet $G_0(s)$ är stabilt

$$\begin{aligned} u(t) = \sin \omega t &\Rightarrow y(t) = |G_0(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G_0(i\omega)) \\ z(t) &= -|G_0(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G_0(i\omega)) \\ &= |G_0(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G_0(i\omega) + \pi) \end{aligned}$$

Om $u(t) = z(t)$ uppstår en stabil självsvängning i kretsen när brytaren slås om

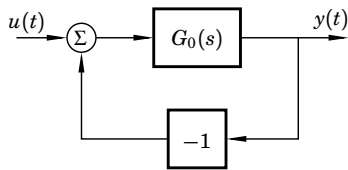
Detta händer om

$$\begin{aligned} |G_0(i\omega)| &= 1 \\ \arg G_0(i\omega) &= -\pi \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

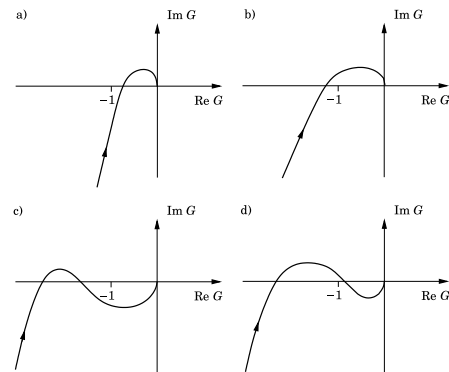
Nyquistkurvan för $G_0(s)$ går genom punkten -1

Nyquists stabilitetssats



Antag att öppna systemet $G_0(s)$ saknar poler i höger halvplan. Det slutna systemet är asymptotiskt stabilt om man går utefter kurvan $G_0(i\omega)$ från $\omega = 0$ till $\omega = \infty$ och finner att punkten -1 hamnar till vänster om kurvan.

Exempel



a) stabilt, b) instabilt, c) stabilt, d) instabilt

Stabilitetsmarginaler

Amplitudmarginalen anger hur mycket förstärkningen kan öka utan att slutna systemet blir instabilt:

- ▶ Låt ω_0 vara den minsta frekvens där $\arg G_0(i\omega_0) = -180^\circ$
- ▶ Amplitudmarginalen ges då av $A_m = 1/|G_0(i\omega_0)|$

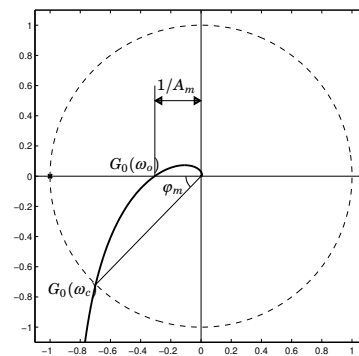
(Typiska marginaler: $A_m = 2-6$)

Fasmarginalen anger hur mycket fasen kan minska utan att slutna systemet blir instabilt:

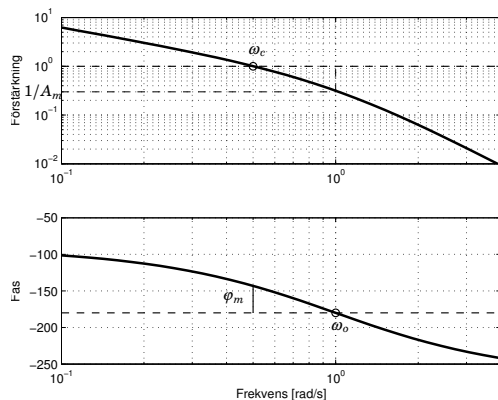
- ▶ Låt **skärfrekvensen** (cross-over frequency) ω_c vara den minsta frekvens där $|G_0(i\omega_c)| = 1$
- ▶ Fasmarginalen ges då av $\varphi_m = 180^\circ + \arg G_0(i\omega_c)$

(Typiska marginaler: $\varphi_m = 30^\circ-60^\circ$)

Amplitud- och fasmarginal i Nyquistdiagrammet

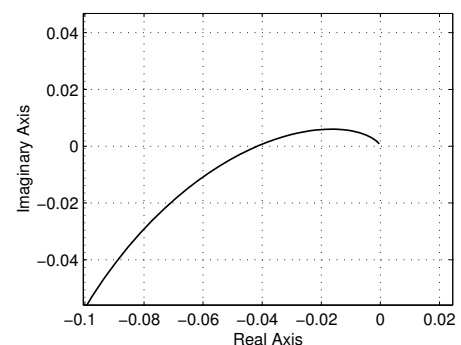


Amplitud- och fasmarginal i Bodediagrammet



Exempel

$$G_0(s) = \frac{1}{(s + 3.732)(s + 1)(s + 0.2679)}$$



Avläsning av amplitudmarginal:

$$\frac{1}{A_m} = 0.042 \quad \Leftrightarrow \quad A_m = 24$$

Tolkning: Om man reglerar systemet med en P-regulator kan förstärkningen vara max 24 utan att slutna systemet blir instabilt.