

Systemteknik/Processreglering Föreläsning 7

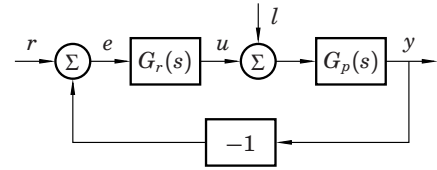
Återkopplade system II

- Analys av stationära fel – regulatorproblemet
- Känslighet
- Tillståndsåterkoppling

Läsanvisning: *Process Control*: 5.4–5.6

1

Analys av stationära fel – regulatorproblemet



Överföringsfunktion från laststörningen l till reglerfelet e :

$$E(s) = -\frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)G_r(s)}L(s)$$

Det stationära felet kan beräknas med slutvärdesteoremet:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (\text{om gränsvärdet existerar})$$

2

Antag n integratorer i kretsöverföringsfunktionen $G_0(s) = G_r(s)G_p(s)$ och m integratorer i regulatorn $G_r(s)$:

$$G_0(s) = \frac{KQ(s)}{s^n P(s)}$$

$$G_r(s) = \frac{K_1 Q_1(s)}{s^m P_1(s)}$$

$$G_p(s) = \frac{K_2 Q_2(s)}{s^{n-m} P_2(s)}$$

med $Q_1(0) = P_1(0) = Q_2(0) = P_2(0) = 0$ och $n \geq m$

Då:

$$E(s) = -\frac{s^m K_2 P_1(s) Q_2(s)}{s^n P(s) + K Q(s)} L(s)$$

3

Antag $l(t)$ steg, $L(s) = a/s$:

$$e(\infty) = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^m K_2 P_1(s) Q_2(s) a}{s^n P(s) + K Q(s)} = \begin{cases} -a K_2 / (1 + K) & n = 0, m = 0 \\ -a / K_1 & n \geq 1, m = 0 \\ 0 & n \geq m, m \geq 1 \end{cases}$$

Antag $l(t)$ ramp, $L(s) = b/s^2$:

$$e(\infty) = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^m K_2 P_1(s) Q_2(s)}{s^n P(s) + K Q(s)} \cdot \frac{b}{s} = \begin{cases} -\infty & n \geq 0, m = 0 \\ -b / K_1 & n \geq 1, m = 1 \\ 0 & n \geq m, m \geq 2 \end{cases}$$

Slutsats:

- Eliminering av stegstörning kräver 1 integrator i **regulatorn**
- Eliminering av rampstörning kräver 2 integratorer i **regulatorn**

O.S.V.

4

Känslighet

Hur känsligt är ett öppet/slutet system för parametervariationer?

Exempel: Olinjär ventil:

$$y = g(u) = u^2, \quad 0.1 \leq u \leq 1$$

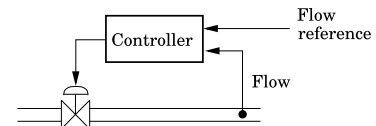
Ventilens förstärkning beror på arbetspunkt u_0 :

$$\Delta y \approx g'(u_0) \Delta u = 2u_0 \Delta u$$

Förstärkningen varierar mellan 0.2 och 2.0 beroende på u_0

5

Inför reglering:



P-regulator: $u = K(y_{\text{ref}} - y) \Rightarrow$

$$\sqrt{y} = K(y_{\text{ref}} - y)$$

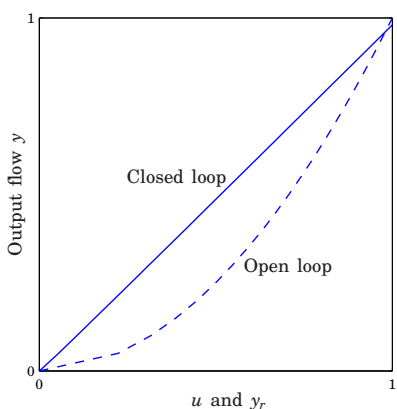
$$y_{\text{ref}} = y + \frac{\sqrt{y}}{K} = f(y)$$

$$\Delta y_{\text{ref}} \approx f'(y_0) \Delta y$$

$$\Delta y \approx \frac{1}{f'(y_0)} \Delta y_{\text{ref}} = \frac{2K\sqrt{y_0}}{1 + 2K\sqrt{y_0}} \Delta y_{\text{ref}} = \frac{2Ku_0}{1 + 2Ku_0} \Delta y_{\text{ref}}$$

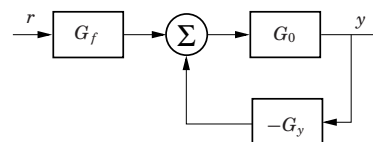
Antag $K = 50$. Förstärkningen varierar mellan 0.91 och 0.99 beroende på u_0

6



7

Relativ känslighet



Slutna systemets överföringsfunktion:

$$G_c(s) = \frac{G_f(s)G_0(s)}{1 + G_0(s)G_y(s)}$$

Hur mycket påverkas slutna systemet av variationer i komponenterna G_f , G_0 och G_y ?

8

Definiera den **relativa känsligheten** av en överföringsfunktion G med avseende på komponenten H som

$$S_H = \frac{dG}{dH} \cdot \frac{H}{G}$$

För G_c har vi

$$S_{G_f} = 1$$

$$S_{G_o} = \frac{1}{1 + G_o G_y}$$

$$S_{G_y} = -\frac{G_o G_y}{1 + G_o G_y}$$

- $S_{G_o} \approx 0$ om krets förstärkningen $G_o G_y$ stor
- $S_{G_y} \approx -1$ om krets förstärkningen $G_o G_y$ stor

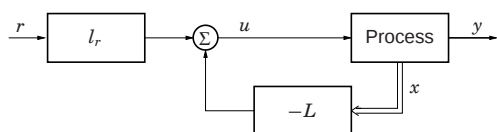
9

Tillståndsåterkoppling

Idé: återkoppla från processens samtliga tillståndsvariabler (som antas mätbara)

Bättre prestanda än med PID för högre ordningens processer

Regulatorstruktur:



10

Process:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

Öppna systemets karakteristiska polynom: $\det(sI - A)$

Regulator:

$$u = l_r r - l_1 x_1 - l_2 x_2 - \dots - l_n x_n = l_r r - Lx$$

$$L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

11

Slutet system:

$$\dot{x} = (A - BL)x + Bl_r r$$

$$y = Cx$$

Slutna systemets överföringsfunktion:

$$Y(s) = C(sI - A + BL)^{-1} Bl_r R(s)$$

Slutna systemets karakteristiska polynom:

$$\det(sI - A + BL)$$

Med hjälp av tillståndsåterkopplingen kan slutna systemets poler placeras godtyckligt

12

Parametern l_r väljs så att $y = r$ stationärt, d.v.s. så att slutna systemets statiska förstärkning blir 1.

Slutna systemets statiska förstärkning:

$$G_c(0) = C(-A + BL)^{-1}BL \equiv 1$$

$$\Rightarrow l_r = (C(-A + BL)^{-1}B)^{-1}$$

13

Exempel

Process (trippeltank):

$$G_p(s) = \frac{1}{(1+s)^3}$$

Processen på tillståndsform:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

Utforma en tillståndsåterkoppling

$$u = -l_1x_1 - l_2x_2 - l_3x_3 + l_r r = -Lx + l_r r$$

14

Slutna systemets karakteristiska polynom:

$$\det(sI - A + BL) = \begin{vmatrix} s+1+l_1 & l_2 & l_3 \\ -1 & s+1 & 0 \\ 0 & -1 & s+1 \end{vmatrix}$$

$$= (s+1+l_1)(s+1)^2 + l_2(s+1) + l_3$$

$$= s^3 + (3+l_1)s^2 + (3+2l_1+l_2)s + (1+l_1+l_2+l_3)$$

Antag att vi vill placera polerna i -3 , $-2+i$ och $-2-i \Rightarrow$ önskat karakteristiskt polynom

$$(s+3)(s+2-i)(s+2+i) = s^3 + 7s^2 + 17s + 15$$

15

Jämför faktiskt och önskat kar. pol:

$$\begin{aligned} 3+l_1 &= 7 \\ 3+2l_1+l_2 &= 17 \\ 1+l_1+l_2+l_3 &= 15 \end{aligned}$$

med lösning

$$L = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Beräkna till sist l_r :

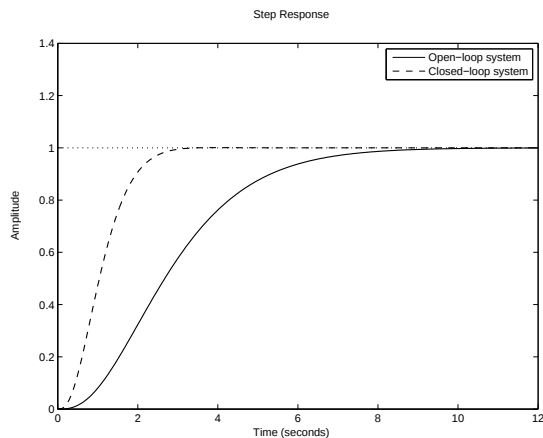
$$l_r = (C(-A + BL)^{-1}B)^{-1} = 15$$

Regulator:

$$u = -4x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 15r$$

16

Simulering av stegsvar:



17

Återkopplade system – sammanfattning

Fördelar:

- Förändrad dynamik (snabbare, mera väldämpat, o.s.v.)
 - Slutna systemets poler kan bestämmas genom lämpligt val av regulatorparametrarna (s.k. polplacering)
- Undertryckning av störningar
 - Stationära fel kan analyseras med slutvärdesteoremet
- Minskad känslighet mot processvariationer och olinjäriteter

Potentiell nackdel:

- Kan leda till instabilitet (mer om detta i nästa föreläsning)

18