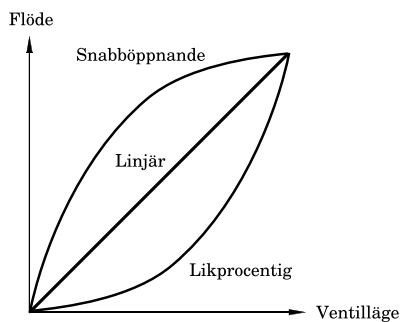


- ▶ Olinjära system
- ▶ Linjärisering

Läsanvisning: *Process Control*: 4.1
Feedback Systems: 3.7, 4.2

Exempel: Ventilkarakteristik



Exempel: Tankprocess

$$A \frac{dh}{dt} = -a \sqrt{2gh} + q_{in}$$

Exempel: Exotermisk CSTR

(*Process Control*: Example 2.7)

x_A = dimensionslös koncentration av A

x_T = dimensionslös temperatur

$$\tau \frac{dx_A}{dt} = u_{v,in}(x_{A,in} - x_A) - D_m \exp\left(\gamma\left(1 - \frac{1}{x_T}\right)\right)$$

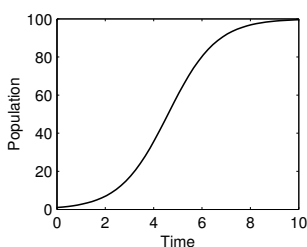
$$\tau \frac{dx_T}{dt} = u_{v,i}(x_{T,in} - x_T) + \beta D_m \exp\left(\gamma\left(1 - \frac{1}{x_T}\right)\right) x_A + \frac{\tau}{\tau_c}(x_{T,c} - x_T)$$

Exempel: Logistisk tillväxtmodell

(*Feedback Systems*: 3.7)

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{x_c}\right)$$

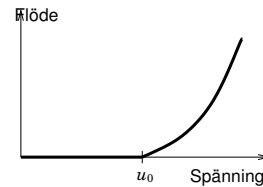
x = population, r = net growth rate, x_c = carrying capacity



- ▶ Olinjäriteter i ställdon och mätton, t.ex.
 - ▶ övre och nedre begränsningar – finns alltid!
 - ▶ pumpar och ventiler med olinjär karakteristik
 - ▶ friktion och glapp
 - ▶ olinjära givare för temperatur, flöde, koncentration
- ▶ Olinjär dynamik i processen, t.ex.
 - ▶ höjdberoende utflödes hastighet
 - ▶ temperaturberoende reaktionshastighet
 - ▶ vinkelberoende acceleration
 - ▶ populationsberoende tillväxthastighet
- ▶ Olinjäriteter i regulatören, t.ex.
 - ▶ av/på-reglering

Exempel: Pumpkarakteristik

Pumpen i tanklaborationerna:



Exempel: Inverterad pendel

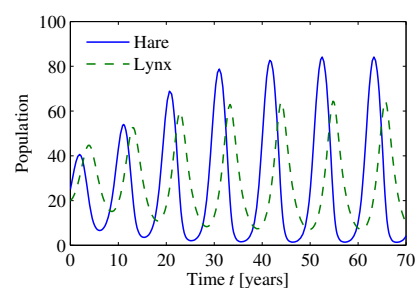


$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \frac{g}{l} \sin \theta - \frac{\gamma}{l} \dot{\theta} + \frac{1}{l} \cos \theta u \end{pmatrix}$$

Exempel: Harar och lodjur

$$\frac{dH}{dt} = rH \left(1 - \frac{H}{k}\right) - \frac{aHL}{c + H}, \quad H \geq 0,$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{aHL}{c + H} - dL, \quad L \geq 0$$



Linjära kontra olinjära system

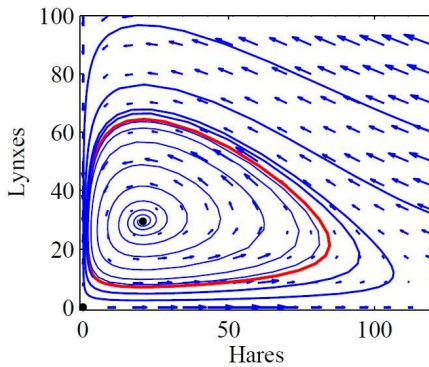
Linjära system

- ▶ kan ekvivalent beskrivas med linjär differentialekvation/tillståndsmodell, överföringsfunktion, impulssvar eller stegsvar
- ▶ har alltid jämviktspunkten $x = 0$
- ▶ global analys – polerna/egenvärdena avgör stabiliteten globalt

Olinjära system

- ▶ kan beskrivas med olinjär differentialekvation/tillståndsmodell
- ▶ kan ha många olika jämviktspunkter (stabila/instabila) och även uppvisa gränsvängningar
- ▶ fasporträtt, simulering, lokal analys via linjärisering

Exempel: harar och lodjur



Jämviktspunkter

Olinjär process:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u)\end{aligned}$$

Processens jämviktspunkter (*equilibria*) eller stationära punkter (*stationary points*) är alla punkter (x^0, u^0) där

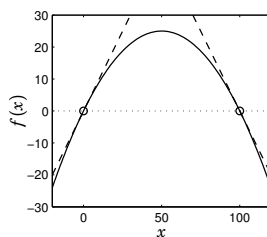
$$f(x^0, u^0) = 0$$

d.v.s. alla tidsderivator är noll.

Exempel: Logistiska tillväxtmodellen

$$rx^0\left(1 - \frac{x^0}{x_c}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^0 = 0 \\ x^0 = x_c \end{cases}$$

Exempel: Logistiska tillväxtmodellen med $x_c = 100$, $r = 1$



$$x^0 = 0: \quad \frac{d\Delta x}{dt} \approx \Delta x \quad (\text{lokalt instabilt})$$

$$x^0 = 100: \quad \frac{d\Delta x}{dt} \approx -\Delta x \quad (\text{lokalt asymptotiskt stabilt})$$

Fasporträtt (phase portrait)

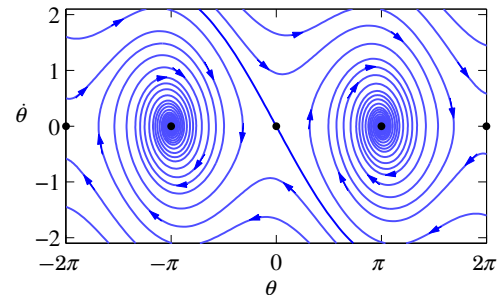
Andra ordningens olinjära tillståndsmodeller

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

kan visualiseras i ett fasporträtt där hastighetsvektorn $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$ ritas som en pil för olika värden på tillståndet $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Kan även ritas som ett antal heldragna trajektorier

Exempel: inverterad pendel ($u = 0$)



Linjärisering – en variabel

Antag olinjärt system i en variabel: $\dot{x} = f(x)$

1. Hitta stationär punkt x^0 , där $f(x^0) = 0$
2. Approximera $f(x)$ med en rät linje genom x^0 :

$$f(x) \approx \underbrace{f(x^0)}_{=0} + \underbrace{\frac{df}{dx}\bigg|_{x^0}}_a (x - x^0)$$

3. Byt tillståndsvariabel och betrakta istället avvikelser Δx från jämviktspunkten:

$$\Delta x = x - x^0$$

4. Systemet kan då skrivas

$$\frac{d\Delta x}{dt} \approx a\Delta x$$

Linjärisering – allmänna fallet

1. Hitta en stationär punkt (x^0, u^0) till systemet

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u)\end{aligned}$$

2. Gör 1:a ordningens Taylorapproximationer av f och g kring (x^0, u^0) :

$$f(x, u) \approx \underbrace{f(x^0, u^0)}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x^0, u^0)} (x - x^0) + \frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{(x^0, u^0)} (u - u^0)$$

$$g(x, u) \approx \underbrace{g(x^0, u^0)}_{=y^0} + \frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{(x^0, u^0)} (x - x^0) + \frac{\partial g}{\partial u}\bigg|_{(x^0, u^0)} (u - u^0)$$

3. Inför nya variabler $\Delta x = x - x^0$, $\Delta u = u - u^0$ och $\Delta y = y - y^0$

4. Systemet kan nu skrivas som

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(x, u) \approx \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^0, u^0)}}_A \Delta x + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(x^0, u^0)}}_B \Delta u$$

$$\Delta y = g(x, u) - y^0 \approx \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x^0, u^0)}}_C \Delta x + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{(x^0, u^0)}}_D \Delta u$$

Exempel: Linjärisering av tankprocessen

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{a}{A}\sqrt{2gh} + \frac{q_{in}}{A} = f(h, q_{in})$$

$$y = h = g(h, q_{in})$$

Alla jämviktpunkter (h^0, q_{in}^0) ges av

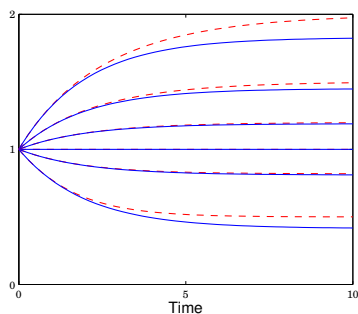
$$q_{in}^0 = a\sqrt{2gh^0}$$

Beräkna och utvärdera partiella derivator:

$$\frac{\partial f}{\partial h} \Big|_{(h^0, q_{in}^0)} = -\frac{a}{A}\sqrt{\frac{g}{2h^0}} \quad \frac{\partial f}{\partial q_{in}} \Big|_{(h^0, q_{in}^0)} = \frac{1}{A}$$

$$\frac{\partial g}{\partial h} \Big|_{(h^0, q_{in}^0)} = 1 \quad \frac{\partial g}{\partial q_{in}} \Big|_{(h^0, q_{in}^0)} = 0$$

Simulering av den linjäriserade tankprocessen (heldragen) och olinjära tankprocessen (streckad) vid ändring av inflödet till en ny konstant nivå:



Bra överensstämmelse för små avvikelser från jämviktsläget

Exempel: Linjärisering av pendeln

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \frac{g}{l} \sin \theta - \frac{\gamma}{l} \dot{\theta} + \frac{1}{l} \cos \theta u \end{pmatrix} = f(\theta, \dot{\theta}, u)$$

$$y = \theta = g(\theta, \dot{\theta}, u)$$

Stationära punkter ($u = 0$): inverterat respektive hängande läge

Vi linjäriserar kring hängande läget ($\theta^0 = \pi, \dot{\theta}^0 = 0, u^0 = 0$)

Beräkna och utvärdera partiella derivator:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} \Big|_{(\theta^0, \dot{\theta}^0, u^0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{g}{l} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} \Big|_{(\theta^0, \dot{\theta}^0, u^0)} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}} \Big|_{(\theta^0, \dot{\theta}^0, u^0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\gamma}{l} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial \dot{\theta}} \Big|_{(\theta^0, \dot{\theta}^0, u^0)} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(\theta^0, \dot{\theta}^0, u^0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{l} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{(\theta^0, \dot{\theta}^0, u^0)} = 0$$

Notera att f och g kan vara vektorer.

Ett system med två tillståndsvariabler x_1 och x_2 , en styrsignal u och en mätsignal y innebär t.ex.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Inför nya variabler:

$$\Delta x = x - x^0$$

$$\Delta u = u - u^0$$

$$\Delta y = y - y^0$$

där $y^0 = h^0$

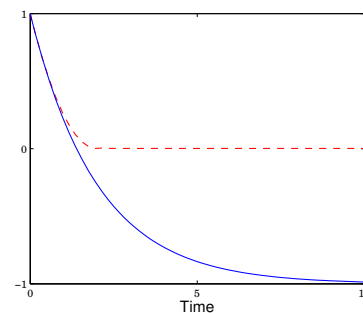
Det linjäriserade systemet blir

$$\frac{d\Delta x}{dt} = -\alpha \Delta x + \beta \Delta u$$

$$\Delta y = \Delta x$$

där $\alpha = \frac{a}{A}\sqrt{\frac{g}{2h^0}}$ och $\beta = \frac{1}{A}$

Simulering av den linjäriserade tankprocessen (heldragen) och olinjära tankprocessen (streckad) när inflödet stängs av:



Linjäriserade modellen ger realistiskt resultat

Inför nya variabler:

$$\Delta x = \begin{pmatrix} \theta - \theta^0 \\ \dot{\theta} - \dot{\theta}^0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta u = u - u^0$$

$$\Delta y = y - y^0$$

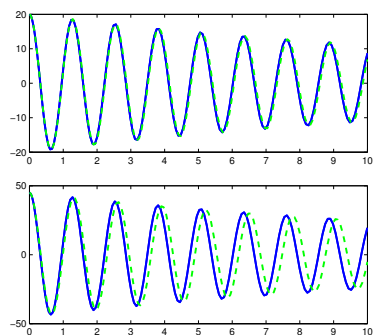
där $y^0 = \theta^0$

Det linjäriserade systemet blir

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{\gamma}{l} \end{pmatrix} \Delta x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{l} \end{pmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \Delta x$$

Simulering av linjäriserade (heldragen) och olinjära pendeln (streckad) med initialvinkelavvikelse 20° (övre) resp. 50° (nedre) från hängande läget ($l = 0.4, \gamma = 0.05, g = 9.81$)



Bra överensstämmelse för relativt stora avvikelser från jämviktsläget

Linjärisering kring inverterat läge

Samma procedur som tidigare med $\theta^0 = 0, \dot{\theta}^0 = 0, u^0 = 0$
Det linjäriserade systemet blir

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{\gamma}{l} \end{pmatrix} \Delta x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{l} \end{pmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \Delta x$$

Simulering av linjäriserade (heldragen) och olinjära pendeln (streckad) med initialvinkelavvikelse 1° från inverterat läge ($l = 0.4, \gamma = 0.05, g = 9.81$)

