

Systemteknik/Processreglering Föreläsning 5

- Olinjära system
- Linjärisering

Läsanvisning: *Process Control*: 4.1, *Feedback Systems*: 3.7, 4.1–4.2

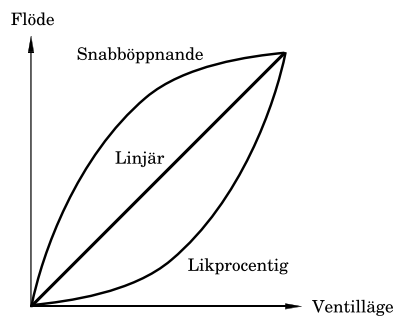
1

Olika sorters olinjäriteter

- Olinjäriteter i ställdon och mätdon, t.ex.
 - övre och nedre begränsningar – finns alltid!
 - pumpar och ventiler med olinjär karaktäristik
 - friktion och glapp
 - olinjära givare för temperatur, flöde, koncentration
- Olinjär dynamik i processen, t.ex.
 - höjdberoende utflödeshastighet
 - temperaturberoende reaktionshastighet
 - vinkelberoende acceleration
 - populationsberoende tillväxthastighet
- Olinjäriteter i regulatorn, t.ex.
 - av/på-reglering

2

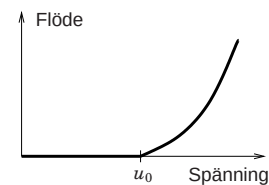
Exempel: Ventilkaraktäristiker



3

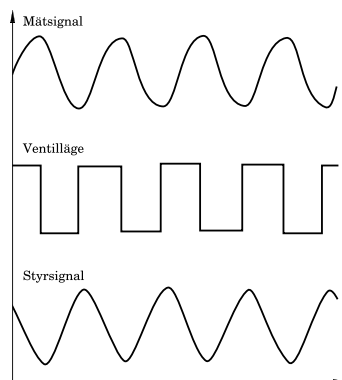
Exempel: Pumpkaraktäristik

Pumpen i tanklaborationerna:



4

Exempel: Stick-slip motion orsakad av friktion i ventil



Gränssvängning (*limit cycle*)

5

Exempel: Tankprocess

$$A \frac{dh}{dt} = -a \sqrt{2gh} + q_{in}$$

Exempel: Exotermisk CSTR

(*Process Control*: Example 2.7)

x_A = dimensionslös koncentration av A

x_T = dimensionslös temperatur

$$\tau \frac{dx_A}{dt} = u_{v,in}(x_{A,in} - x_A) - D_m \exp\left(\gamma\left(1 - \frac{1}{x_T}\right)\right)$$

$$\tau \frac{dx_T}{dt} = u_{v,i}(x_{T,in} - x_T) + \beta D_m \exp\left(\gamma\left(1 - \frac{1}{x_T}\right)\right) x_A + \frac{\tau}{\tau_c}(x_{T,c} - x_T)$$

6

Exempel: Inverterad pendel



$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \frac{mgl}{J_t} \sin \theta - \frac{\gamma}{J_t} \dot{\theta} + \frac{l}{J_t} \cos \theta u \end{pmatrix}$$

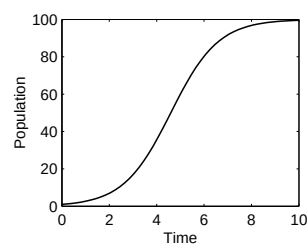
7

Exempel: Logistisk tillväxtmodell

(Feedback Systems: 3.7)

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{x_c} \right)$$

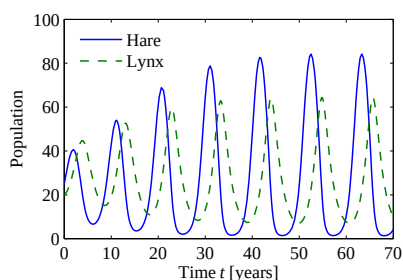
x = population, r = net growth rate, x_c = carrying capacity



8

Exempel: Harar och lodjur

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= rH \left(1 - \frac{H}{k} \right) - \frac{aHL}{c+H}, & H &\geq 0, \\ \frac{dL}{dt} &= b \frac{aHL}{c+H} - dL, & L &\geq 0 \end{aligned}$$



9

Linjära kontra olinjära system

Linjära system

- kan ekvivalent beskrivas med linjär differentialekvation/ tillståndsmodell, överföringsfunktion, impulssvar eller stegsvar
- har alltid jämviktpunkten $x = 0$
- global analys – polerna/egenvärdena avgör stabiliteten globalt

Olinjära system

- kan beskrivas med olinjär differentialekvation/tillståndsmodell
- kan ha många olika jämviktpunkter (stabila/instabila) och även uppvisa gränssvängningar
- fasporträtt, simulering, lokal analys via linjärisering

10

Fasporträtt (phase portrait)

Andra ordningens olinjära tillståndsmodeller

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

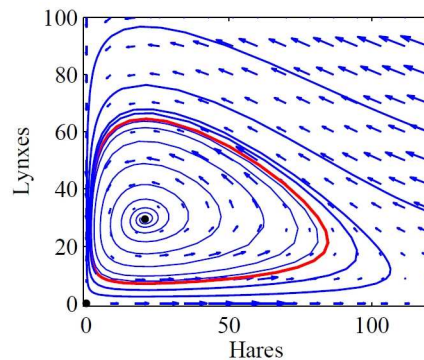
kan visualiseras i ett fasporträtt där hastighetsvektorn $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$ ritas

som en pil för för olika värden på tillståndet $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Kan även ritas som ett antal heldragna trajektorier

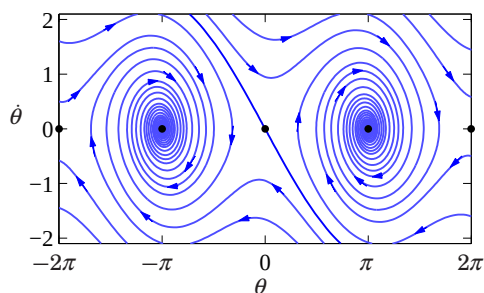
11

Exempel: harar och lodjur



12

Exempel: inverterad pendel ($u = 0$)



13

Jämviktpunkter

Olinjär process:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u)$$

$$y = g(x, u)$$

Processens jämviktpunkter (*equilibria*) eller stationära punkter (*stationary points*) är alla punkter (x^0, u^0) där

$$f(x^0, u^0) = 0$$

d.v.s. alla tidsderivator är noll.

Exempel: Logistiska tillväxtmodellen

$$rx^0 \left(1 - \frac{x^0}{x_c}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^0 = 0 \\ x^0 = x_c \end{cases}$$

14

Linjärisering – en variabel

Antag olinjärt system i en variabel: $\dot{x} = f(x)$

1. Hitta stationär punkt x^0 , där $f(x^0) = 0$
2. Approximera $f(x)$ med en rät linje genom x^0 :

$$f(x) \approx \underbrace{f(x^0)}_{=0} + \underbrace{\frac{df}{dx}\bigg|_{x^0}}_a (x - x^0)$$

3. Byt tillståndsvariabel och betrakta istället avvikelser Δx från jämviktpunkten:

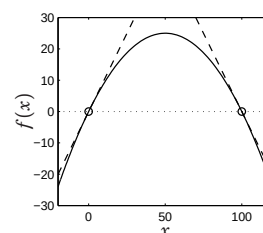
$$\Delta x = x - x^0$$

4. Systemet kan då skrivas

$$\frac{d\Delta x}{dt} \approx a\Delta x$$

15

Exempel: Logistiska tillväxtmodellen med $x_c = 100$, $r = 1$



$$x^0 = 0: \quad \frac{d\Delta x}{dt} \approx \Delta x \quad (\text{lokalt instabilt})$$

$$x^0 = 100: \quad \frac{d\Delta x}{dt} \approx -\Delta x \quad (\text{lokalt asymptotiskt stabilt})$$

16

Linjärisering – allmänna fallet

1. Hitta en stationär punkt (x^0, u^0) till systemet

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u)$$

$$y = g(x, u)$$

2. Gör 1:a ordningens Taylorapproximationer av f och g kring (x^0, u^0) :

$$f(x, u) \approx \underbrace{f(x^0, u^0)}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x^0, u^0)} (x - x^0) + \frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{(x^0, u^0)} (u - u^0)$$

$$g(x, u) \approx \underbrace{g(x^0, u^0)}_{=y^0} + \frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{(x^0, u^0)} (x - x^0) + \frac{\partial g}{\partial u}\bigg|_{(x^0, u^0)} (u - u^0)$$

17

3. Inför nya variabler $\Delta x = x - x^0$, $\Delta u = u - u^0$ och $\Delta y = y - y^0$

4. Systemet kan nu skrivas som

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(x, u) \approx \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x^0, u^0)}}_A \Delta x + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{(x^0, u^0)}}_B \Delta u$$

$$\Delta y = g(x, u) - y^0 \approx \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{(x^0, u^0)}}_C \Delta x + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial u}\bigg|_{(x^0, u^0)}}_D \Delta u$$

18

Notera att f och g kan vara vektorer.

Ett system med två tillståndsvariabler x_1 and x_2 , en styrsignal u och en mätsignal y innebär t.ex.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

19

Exempel: Linjärisering av tankprocessen

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= -\frac{a}{A}\sqrt{2gh} + \frac{q_{in}}{A} &= f(h, q_{in}) \\ y &= h &= g(h, q_{in}) \end{aligned}$$

Alla jämviktpunkter (h^0, q_{in}^0) ges av

$$q_{in}^0 = a\sqrt{2gh^0}$$

Beräkna och utvärdera partiella derivator:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial h} \right|_{(h^0, q_{in}^0)} &= -\frac{a}{A}\sqrt{\frac{g}{2h^0}} & \left. \frac{\partial f}{\partial q_{in}} \right|_{(h^0, q_{in}^0)} &= \frac{1}{A} \\ \left. \frac{\partial g}{\partial h} \right|_{(h^0, q_{in}^0)} &= 1 & \left. \frac{\partial g}{\partial q_{in}} \right|_{(h^0, q_{in}^0)} &= 0 \end{aligned}$$

20

Inför nya variabler:

$$\begin{aligned} \Delta x &= h - h^0 \\ \Delta u &= q_{in} - q_{in}^0 \\ \Delta y &= y - y^0 \end{aligned}$$

där $y^0 = h^0$

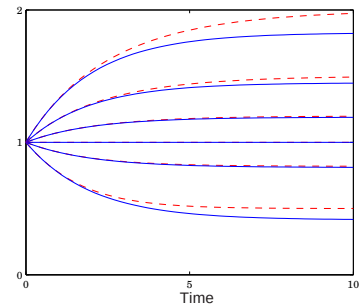
Det linjäriserade systemet blir

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x}{dt} &= -\alpha\Delta x + \beta\Delta u \\ \Delta y &= \Delta x \end{aligned}$$

där $\alpha = \frac{a}{A}\sqrt{\frac{g}{2h^0}}$ och $\beta = \frac{1}{A}$

21

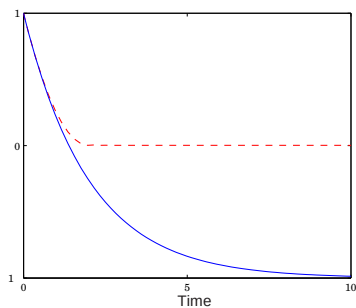
Simulering av den linjäriserade tankprocessen (heldragen) och olinjära tankprocessen (streckad) vid ändring av inflödet till en ny konstant nivå:



Bra överensstämmelse för små avvikelser från jämviktsläget

22

Simulering av den linjäriserade tankprocessen (heldragen) och olinjära tankprocessen (streckad) när inflödet stängs av:



Linjäriserade modellen ger orealistiskt resultat

23