

Linjär analys II

- Överföringsfunktion
- Impulssvar och stegsvar
- Samband mellan överföringsfunktion och stegsvar

Läsanvisning: *Process Control*: 3.6–3.8

Överföringsfunktion

Antag alla initialvärden noll och Laplacetransformera diff.ekvationen:

$$(s^n + p_1 s^{n-1} + \dots + p_n)Y(s) = (q_0 s^m + q_1 s^{m-1} + \dots + q_m)U(s)$$

Inför

$$P(s) = s^n + p_1 s^{n-1} + \dots + p_n$$

$$Q(s) = q_0 s^m + q_1 s^{m-1} + \dots + q_m$$

Diff.ekvationen kan då skrivas som

$$P(s)Y(s) = Q(s)U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{Q(s)}{P(s)}}_{G(s)} U(s)$$

$G(s)$ kallas för systemets **överföringsfunktion** (transfer function)

Omvandling: tillståndsform till överföringsfunktion

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Antag initialtillståndet $x(0) = 0$.

Laplacetransformera:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Exempel: tankreaktorn

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -(\frac{q}{V} + k_1) & 0 \\ k_1 & -\frac{q}{V} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{q}{V} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

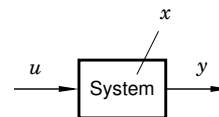
$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

Överföringsfunktion:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s + \frac{q}{V} + k_1 & 0 \\ -k_1 & s + \frac{q}{V} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{q}{V} \\ 0 \end{pmatrix} + 0$$

$$= \frac{\frac{q}{V} k_1}{(s + \frac{q}{V} + k_1)(s + \frac{q}{V})}$$



► Tillståndsform:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

► Högre ordningens differentialekvation:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + p_n y = q_0 \frac{d^m u}{dt^m} + q_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + q_m u$$

Exempel mekaniska systemet

Parametrar $k = m = 1, d = 0$ och insignal $F = u$

Mätning: position (z)

Dynamik beskrivs av differentialekvation (se förel 2):

$$\ddot{y} + y = u$$

Sått $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ och Laplacetransformera:

$$(s^2 + 1)Y(s) = U(s)$$

Lös ut $Y(s)$:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{s^2 + 1}}_{G(s)} U(s)$$

Överföringsfunktion $G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$

Lös ut $X(s)$:

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Sått in i ekvationen för $Y(s)$:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

$$= \underbrace{(C(sI - A)^{-1}B + D)}_{G(s)} U(s)$$

Poler och nollställen

Överföringsfunktionen $G(s)$ kan ofta skrivas som ett rationellt uttryck:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}, \quad \deg Q \leq \deg P$$

Nollställen (zeros): rötter till $Q(s) = 0$

Poler (poles): rötter till $P(s) = 0$ (karaktäristiska ekvationen).

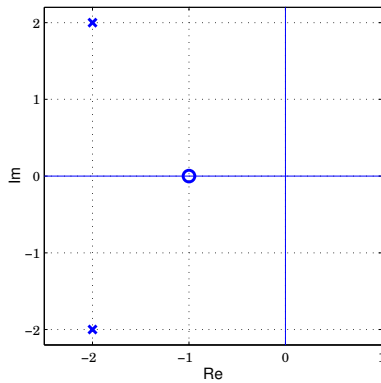
Man kan visa att $P(s) = \det(sI - A)$, d.v.s. poler till $G(s) \Leftrightarrow$ egenvärden till A !

Kan ritas i ett singularitetsdiagram/pol-nollställe-diagram (singularity diagram/pole-zero map)

- Poler: x
- Nollställen: o

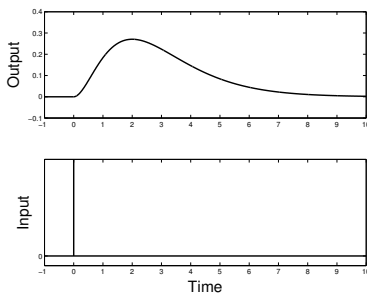
Exempel:

$$G(s) = \frac{k(s+1)}{s^2 + 4s + 8}$$



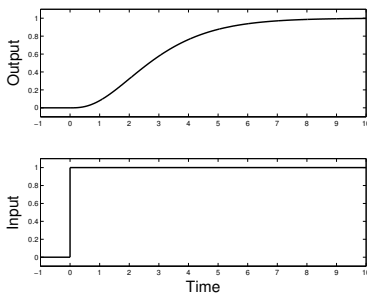
Impulssvar (impulse response)

Antag systemet i jämvikt. Hur reagerar utsignalen om insignalen ändras i form av en impuls?



Stegsvar (step response)

Antag systemet i jämvikt. Hur reagerar utsignalen om insignalen ändras i form av ett enhetssteg?



Statisk förstärkning

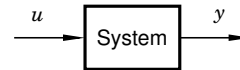
Stegsvarets slutvärde kallas **statisk förstärkning** (steady state gain/static gain).

För linjära system kan stegsvarets slutvärde beräknas med hjälp av **slutvärdeteoremet** (gränsvärdet existerar endast för asymptotiskt stabila system):

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{1}{s} = G(0)$$

Räkna ut systemsvar med Laplacetransformen

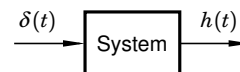


1. Hitta insignalens Laplacetransform $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$
2. Hitta systemets överföringsfunktion $G(s)$
3. Beräkna utsignalen i Laplace-domänen:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

4. Använd invers Laplace-transform: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$

Impulssvar för linjära system



1. Laplace-transformera insignalen: $U(s) = 1$
2. Utsignalen blir

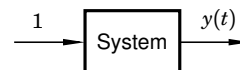
$$H(s) = G(s)U(s) = G(s)$$

3. Inverstransformering ger impulssvaret

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

$h(t)$ kallas även viktfunction (weighting function)

Stegsvar för linjära system



1. Laplace-transformera insignalen: $U(s) = \frac{1}{s}$
2. Utsignalen blir

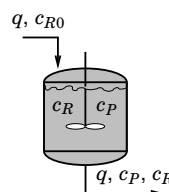
$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s) \frac{1}{s}$$

3. Inverstransformering ger stegsvaret

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s) \frac{1}{s}\right\}$$

(Notera att $y(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau$)

Exempel: tankreaktorn



Överföringsfunktion från c_{R0} till c_P :

$$G(s) = \frac{\frac{q}{V} k_1}{(s + \frac{q}{V} + k_1)(s + \frac{q}{V})}$$

Statisk förstärkning:

$$G(0) = \frac{\frac{q}{V} k_1}{(\frac{q}{V} + k_1) \frac{q}{V}} = \frac{1}{\frac{q}{k_1 V} + 1}$$

Tolkning: Om c_{R0} ökar med 1, ökar c_P med $\frac{1}{\frac{q}{k_1 V} + 1}$

- Volym V , flöde q
- Reaktion $R \rightarrow P$
- Reaktionshast. k_1

Typsystem:

- Integrator
- Första ordningens system
- Andra ordningens system med reella poler
- Andra ordningens system med komplexa poler
- Andra ordningens system med ett nollställe

Integrerande system

Pol:

$$s = 0$$

Stegsvar:

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{K}{s^2}$$

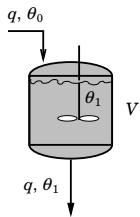
$$y(t) = Kt$$

Inget slutvärde, eftersom systemet är stabilt men inte asymptotiskt stabilt

1:a ordningens system

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT}, \quad T > 0$$

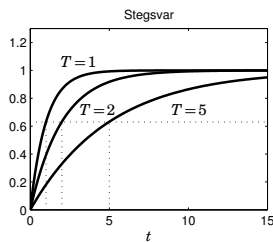
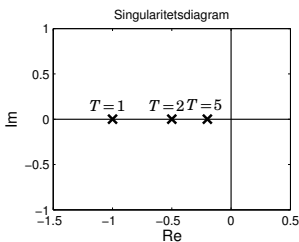
Exempel: temperaturdynamik i en tank:



Överföringsfunktion från θ_0 till θ_1 :

$$G(s) = \frac{1}{1 + s\frac{V}{q}}$$

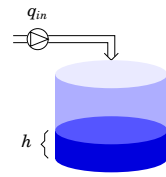
$K = 1$:



- Svarets snabbhet bestäms av polens avstånd från origo

$$G(s) = \frac{K}{s}$$

Exempel: tank utan fritt utflöde:

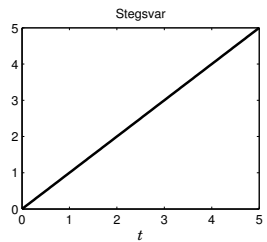
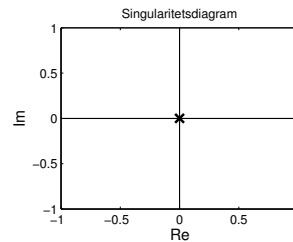


- Tvärsnittsarea: A

Överföringsfunktion från q_{in} till h :

$$G(s) = \frac{1/A}{s}$$

$K = 1$:



1:a ordningens system

Pol:

$$s = -1/T$$

Stegsvar:

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{K}{s(1 + sT)}$$

$$y(t) = K(1 - e^{-t/T})$$

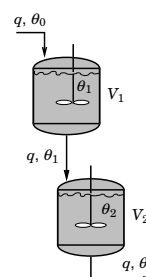
T kallas systemets **tidskonstant** (time constant)

$$y(T) = (1 - e^{-1})K \approx 0.63K$$

2:a ordningens system med reella poler

$$G(s) = \frac{K}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}, \quad T_1, T_2 > 0$$

Exempel: temperaturdynamik i kopplade tankar:



Överföringsfunktion från θ_0 till θ_2 :

$$G(s) = \frac{1}{(1 + s\frac{V_1}{q})(1 + s\frac{V_2}{q})}$$

2:a ordningens system med reella poler

Poler:

$$s = -1/T_1, \quad s = -1/T_2$$

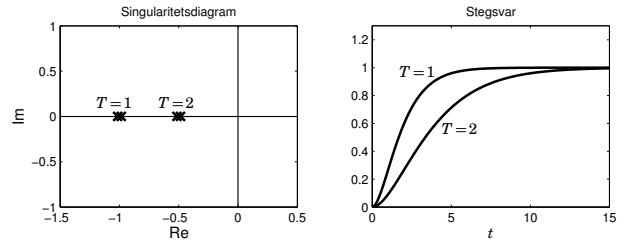
Stegsvar:

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{K}{s(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

$$y(t) = \begin{cases} K \left(1 - \frac{T_1 e^{-t/T_1} - T_2 e^{-t/T_2}}{T_1 - T_2} \right), & T_1 \neq T_2 \\ K \left(1 - e^{-t/T} - \frac{t}{T} e^{-t/T} \right), & T_1 = T_2 = T \end{cases}$$

Två tidskonstanter: T_1, T_2

$K = 1$:

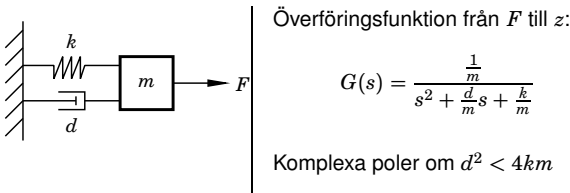


- Två poler ger mjukare och långsammare svar än enkelpol (ekvivalent tidskonstant $T_{eq} = T_1 + T_2$)
- Om $T_1 \gg T_2$ så beter sig systemet i princip som ett 1:a ordningens system med tidskonstant T_1

2:a ordningens system med komplexa poler

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}, \quad \omega_0 > 0, \quad 0 < \zeta < 1$$

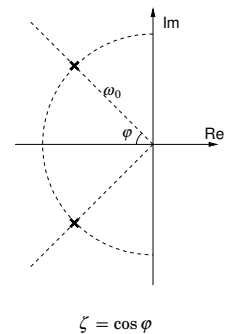
Exempel: positionsdynamik för mekaniskt system:



2:a ordningens system med komplexa poler

Poler:

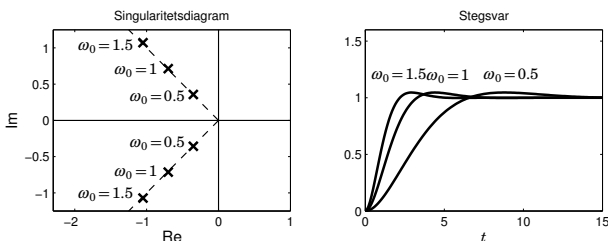
$$s = -\zeta\omega_0 \pm i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_0$$



Stegsvar:

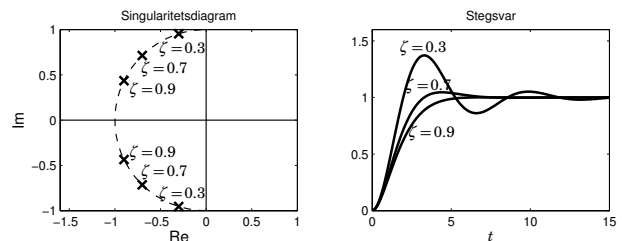
$$y(t) = K \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t + \arccos \zeta) \right)$$

$K = 1$:



- Svarets snabbhet bestäms av polernas avstånd från origo

$K = 1$:



- Svarets dämpning bestäms av polernas vinkel

Inverkan av nollställe

Antag systemet

$$(1 + T_z s) G_0(s)$$

med ett nollställe i $s = -\frac{1}{T_z}$

Stegsvar:

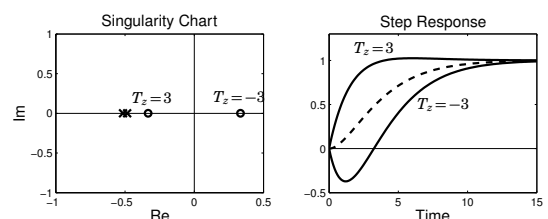
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ G_0(s) \frac{1}{s} \right\} + T_z \mathcal{L}^{-1} \{ G_0(s) \}$$

Viktad summa av stegsvaret och impulssvaret för $G_0(s)$

Stor inverkan om nollstället nära origo

2:a ordningens system med nollställe

Antag system: $G(s) = \frac{1+sT_z}{(1+2s)^2}$



Streckat stegsvar för systemet $G_0(s) = \frac{1}{(1+2s)^2}$

Nollstället påverkar initialbeteendet

Nollställe i höger halvplan ger stegsvar som börjar på "fel" håll

Exempel: system med nollställena i höger halvplan

- Båt med utombordare



- Flexibel stav

Svårstyrda processer

Sådana med

- Pol i höger halvplan (instabilit)
 - Ju större realdel(>0) desto mer svårreglerat**Exempel:**
 - Inverterad (linjäriserad) pendel
 - Cykel i låga farter
 - Fission i kärnkraftverk
- Nollställe i höger halvplan (omvänt svar i början)
 - Ju mindre realdel(>0) desto mer svårreglerat**Exempel:**
 - Båt med utombordare
 - Flexibel stav
- Tidsfördröjning (fördröjt svar)
 - Ju längre tidsfördröjning desto mer svårreglerat**Exempel:**
 - Ventil med långt rör innan flöde når systemet (ex. tank)

Exempel

Bakhjulsstyrd cykel
 $a/b \approx 0.7$ vid 1 m/s



X29, $a/b \approx 4.33$



Tolkning av poler och nollställena

Poler

- Beror bara på A -matrisen, d.v.s. på systemets inre dynamik
- Bestämmer systemets
 - stabilitet
 - snabbhet
 - dämpning

Nollställena

- Mera svårtolkade
- Beror på hur in- och utsignalen är kopplade till systemet, d.v.s. även på B -, C - och D -matriserna
- Inverkar främst på systemsvarets initialbeteende

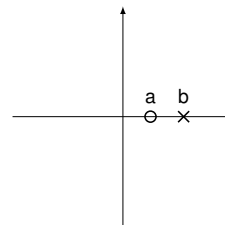
Ostyrbara processer

System med poler och nollställena i höger halvplan ($a, b > 0$):

$$G(s) = \frac{Q(s)(s-a)}{P(s)(s-b)}$$

Om $a = b$: omöjligt att styra

Om $a \leq 3b$: omöjligt att styra robust



Överföringsfunktion och systemsvar i Matlab

```
% Definiera en överföringsfunktion
sys = tf([1 0.5],[1 1.5 1]) % (s+0.5)/(s^2+1.5s+1)

% Räkna ut poler och nollställena
pole(sys)
zero(sys)

% Rita singularitetsdiagram
pzmap(sys)

% Rita impulssvar och stegsvar
impz(sys)
step(sys)
```