

Linjära system I

- Lösning av tillståndsekvationen
- Stabilitet
- Laplacetransformen

Läsanvisning: *Process Control*: 3.1–3.5

Lösning av tillståndsekvationen – skalära fallet

System med en tillståndsvariabel och en insignal:

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bu(t)$$

Lösning:

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau) d\tau$$

Exempel: Konstant insignal $u(t) = u_0$ och $a \neq 0$:

$$x(t) = e^{at}x(0) + \frac{b}{a}(e^{at} - 1)u_0$$

$x(t)$ begränsad om $a < 0$

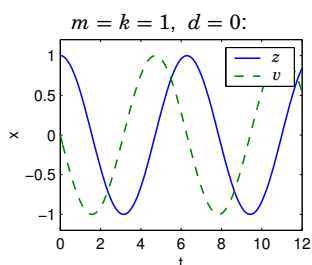
Lösning av tillståndsekvationen – allmänna fallet

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau$$

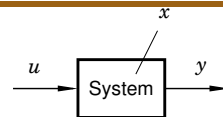
där e^{At} är matrisexponentialfunktionen, definierad som

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$$

Simulering av mekaniska systemet



Linjära tidsinvarianta system

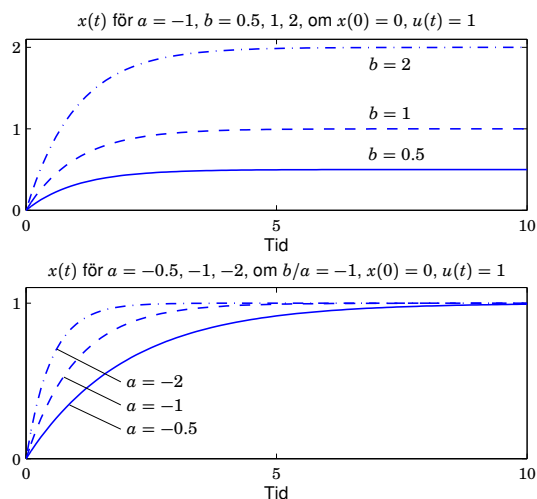


Linjärt tidsinvariant system på tillståndsform:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

Insignal-utsignal-sambandet kan alternativt beskrivas med en n :te ordningens differentialekvation:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + p_n y = q_0 \frac{d^m u}{dt^m} + q_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + q_m u$$



Exempel: Mekaniska systemet

Dynamiken på tillståndsform:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{d}{m} & -\frac{k}{m} \\ \frac{1}{m} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Antag: Ingen dämpning ($d=0$), ingen yttre kraft ($F=u=0$), initialvillkor $x(0) = [v(0) \ z(0)]^T = [0 \ 1]^T, m = k = 1$:

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_A x$$

Exponentialmatris:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Ger lösning:

$$x(t) = e^{At}x(0) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

Eigenvärden

A :s eigenvärden ges av de n rötterna till den karakteristiska ekvationen

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$\det(\lambda I - A) = P(\lambda)$ kallas karakteristiskt polynom

Eigenvärdena kan vara komplexa (komplexkonjugerade)

Multiplicitet av egenvärde = antal eigenvärden med samma värde

Antag diagonal A-matris med egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

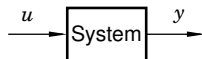
Då

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

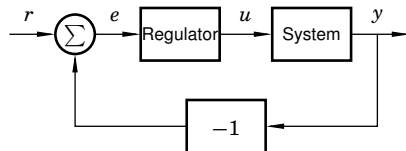
Varje egenvärde λ_i ger en term $e^{\lambda_i t}$ i lösningen

Stabilitet

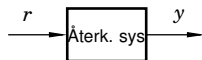
Kan analysera stabilitet för öppna systemet:



Eller för det återkopplade systemet (från r till y):



Analys av återkopplade systemet kan ses som analys av:



Insignal: u till öppna systemet, r till återkopplade systemet

Stabilitetsbegrepp

Asymptotisk stabilitet: $x(t) \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$ för alla initialvärden

Stabilitet: $x(t)$ begränsad då $t \rightarrow \infty$ för alla initialvärden

Instabilitet: $x(t)$ obegränsad då $t \rightarrow \infty$ för något initialvärde

Exempel – återkopplade system

Asymptotiskt stabila/stabila system:

- ▶ Reglerad pendel i inverterat läge
- ▶ Segway
- ▶ Förhoppningsvis alla regelsystem

Instabila system:

- ▶ Tidig version av JAS

Notera:

- ▶ Instabilt (styrbart) öppet system OK, kan stabiliseras med återkoppling
- ▶ Instabilt återkopplat system inte OK

För en generell A-matris ger varje egenvärde en term $P_{m_i-1}(t)e^{\lambda_i t}$ i e^{At} där

- ▶ $P_{m_i-1}(t)$ är ett polynom i t av högst gradtal $m_i - 1$
- ▶ m_i är egenvärdets multiplicitet

Exempel:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Egenvärden:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \quad (m = 2)$$

Exponentialmatris:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Stabilitet

Stabilitet är en inneboende systemegenskap (för öppna eller återkopplade systemet) – beror ej på hur signalen ser ut

Vi kommer framför allt titta på stabilitet för öppna systemet här

Vi kan studera det fria systemet

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

Lösning:

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

Exempel – öppna system

Asymptotiskt stabila system:

- ▶ Vattentank med hål i botten
- ▶ Temperaturen i en ugn
- ▶ Hastigheten i en bil

Stabila system:

- ▶ Vattentank utan hål i botten
- ▶ Pendel (utan dämpning) i hängande läge
- ▶ Tillryggslagd sträcka i en bil

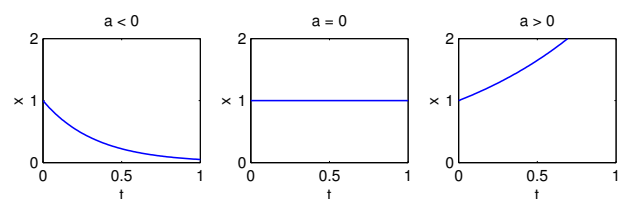
Instabila system:

- ▶ Pendel i inverterat läge
- ▶ Segway

Exempel: skalärt system

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$$

$$x(t) = e^{at}x(0)$$



- ▶ asymptotiskt stabilt om $a < 0$
- ▶ stabilt om $a \leq 0$
- ▶ instabilt om $a > 0$

Stabilitetsvillkor – allmänna fallet

Eigenvärdena λ_i till A-matrisen avgör stabiliteten.

Ett linjärt system är:

- Asymptotiskt stabilt om alla $\text{Re}(\lambda_i) < 0$
- Instabilt om något $\text{Re}(\lambda_i) > 0$
- Stabilt om alla $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ och eventuella egenvärden på imaginära axeln har multiplicitet 1

Exempel: tankreaktorn

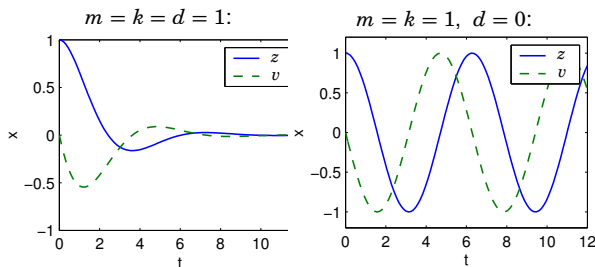
$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -(\frac{q}{V} + k_1) & 0 \\ k_1 & -\frac{q}{V} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{q}{V} \\ 0 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

Eftersom A-matrisen är triangulär så ges egenvärdena direkt av diagonalelementen:

$$\lambda_1 = -(\frac{q}{V} + k_1), \quad \lambda_2 = -\frac{q}{V}$$

Asymptotiskt stabilt (givet att $q, V, k_1 > 0$)

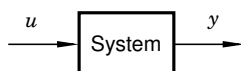
Simulering av mekaniska systemet



Lapacetransformen

Ett kraftfullt matematiskt verktyg för att studera och lösa linjära differentialekvationer

T.ex.



Vad blir utsignalen $y(t)$ givet en viss insignal $u(t)$?

Routh–Hurwitz stabilitetskriterium

2:a ordningens karakteristiskt polynom för 2×2 -matris A:

$$\det(\lambda I - A) = P(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2$$

Alla rötter ligger i vänster halvplan (alltså alla $\text{Re}(\lambda_i) < 0$) om och endast om $p_1 > 0$ och $p_2 > 0$

3:e ordningens karakteristiskt polynom för 3×3 -matris A:

$$\det(\lambda I - A) = P(\lambda) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3$$

Alla rötter ligger i vänster halvplan (alltså alla $\text{Re}(\lambda_i) < 0$) om och endast om $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $p_3 > 0$ och $p_1p_2 > p_3$.

Exempel: mekaniska systemet

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{m} & -\frac{k}{m} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

Eigenvärden:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{d}{m} & \frac{k}{m} \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{d}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

Antag $m, k, d > 0$: Asymptotiskt stabilt (då $d/m > 0, k/m > 0$)

Antag $m, k > 0, d = 0$: Vi får egenvärden

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Alltså är systemet stabilt (men ej asymptotiskt stabilt)

Linjära system på tillståndsform i MATLAB

```
% Definiera systemmatriser
A = [1 2; 3 4];
B = [0; 1];
C = [1 0];
D = 0;

% Skapa tillståndsmodell
sys = ss(A,B,C,D);

% Beräkna egenvärden till A-matrisen
eig(A)

% Simulera systemet utan insignal från ett
% visst initialvärde
initial(sys,x0)
```

Lösa diff.ekvationer utan Lapacetransformen

Exempel: 2:a ordningens inhomogen linjär differentialekvation:

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = u(t)$$

1. Finn alla lösningar till homogena ekvationen

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0$$

- Lös karakteristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0 \Rightarrow r_1, r_2$
- Homogen lösning:

$$y_h = \begin{cases} C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, & r_1 \neq r_2 \\ (C_1 t + C_2) e^{r_1 t}, & r_1 = r_2 \end{cases}$$

2. Finn en partikulärlösning y_p till inhomogena ekvationen
 - Olika *lösningssatser* beroende på $u(t)$
3. Alla lösningar ges av

$$y = y_h + y_p$$

4. Bestäm C_1 och C_2 med hjälp av eventuella begynnelsevillkor

Ganska omständligt...

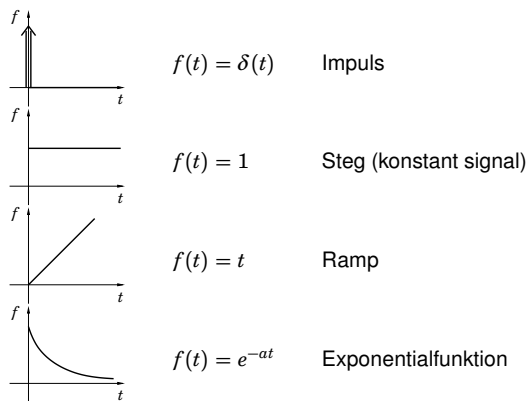
Omvandlar en funktion $f(t)$ till en annan funktion $F(s)$.

- $f(t)$ är en funktion av tiden $t \geq 0$
- $F(s)$ är en funktion av den "komplexa frekvensen" s

Definition:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Några vanliga funktioner (signaler)



Impulsfunktionen $\delta(t)$

- Impuls vid tiden 0
- Oändligt hög och oändligt smal, men med arean 1:

$$p_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon & 0 \leq t < \epsilon \\ 0 & t \geq \epsilon \end{cases}$$

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p_\epsilon(t)$$

Exempel:

$$\frac{dV}{dt} = \delta(t)$$

Tolkning: "Injektion av en enhetsvolym vid tiden noll"

Laplacetransformen av några vanliga funktioner

Impuls:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1$$

Steg:

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Exponentialfunktion:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

Utdrag ur formelsamlingen s. 6:

	Laplacestransform $F(s)$	Tidsfunktion $f(t)$	
1	1	$\delta(t)$	Diracfunktion
2	$\frac{1}{s}$	1	Stegfunktion
3	$\frac{1}{s^2}$	t	Rampfunktion
6	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	
12	$\frac{s}{s^2+a}$	$\cos at$	
24	$\frac{ab}{s(s+a)(s+b)}$	$1 + \frac{ae^{-bt} - be^{-at}}{b-a}$	

Några viktiga egenskaper hos Laplacetransformen

Utdrag ur formelsamlingen s. 5:

	Laplacestransform $F(s)$	Tidsfunktion $f(t)$	
1	$\alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$	$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$	Linjäritet
8	$sF(s) - f(0)$	$f'(t)$	Derivering i t -planet
9	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$	$f''(t)$	
12	$\frac{1}{s} F(s)$	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	Integration i t -planet

Fler viktiga egenskaper

Utdrag ur formelsamlingen s. 5:

	Laplacestransform $F(s)$	Tidsfunktion $f(t)$	
14	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	Slutvärdesteoremet
15	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	Begynnelsevärdesteoremet

OBS! Får bara användas om gränsvärdet i tidsdomänen existerar!

1. Laplace-transformera alla termer i ekvationen
 - Använd formelsamlingen
2. Lös ut $Y(s)$
3. Använd invers Laplace-transform för att hitta $y(t)$
 - Partialbråksuppdelning först om det behövs
 - Använd formelsamlingen

Exempel 2

Lös

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 1$$

med begynnelsevillkoret $y(0) = \dot{y}(0) = 0$.

1. Laplacetransformera:

$$s^2 Y(s) + 3s Y(s) + 2Y(s) = \frac{1}{s}$$
2. Lös ut $Y(s)$:

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$
3. Invers Laplace (transform nr. 24):

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{e^{-2t} - 2e^{-t}}{2}$$

Exempel 1

Lös

$$\dot{y} + 3y = 0$$

med begynnelsevillkoret $y(0) = 5$.

1. Laplacetransformera:

$$sY(s) - 5 + 3Y(s) = 0$$
2. Lös ut $Y(s)$:

$$(s+3)Y(s) = 5$$

$$Y(s) = \frac{5}{s+3} = 5 \cdot \frac{1}{s+3}$$
3. Invers Laplace (transform nr. 6):

$$y(t) = 5e^{-3t}$$

Exempel: Mekaniska systemet

Vi mäter positionen, $y = z$. Vi har $k = m = 1$, $F = d = 0$

Modell (från kraftbalansen, se förel. 2)

$$\ddot{y} + y = 0$$

med begynnelsevillkoret $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$.

1. Laplacetransformera:

$$s^2 Y(s) - s + Y(s) = 0$$
2. Lös ut $Y(s)$:

$$(s^2 + 1)Y(s) = s$$

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$
3. Invers Laplace (transform nr. 12):

$$y(t) = \cos t$$