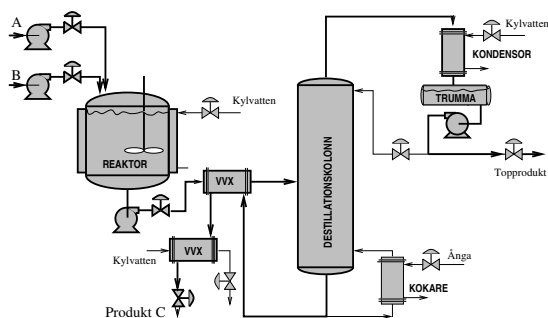


Processmodeller

- ▶ Grafiska representationer
 - ▶ Processschema (principiellt eller detaljerat)
 - ▶ P/I-diagram
 - ▶ (Blockdiagram)
- ▶ Matematisk modellering
- ▶ Tillståndsformen
- ▶ Compartmentsystem

Läsanvisning: *Process Control: 2.1–2.5, Feedback Systems: 3.6.*

Detaljerat processschema



- ▶ Alla viktiga flöden, "alla" enheter (t.ex. pumpar, ventiler), viktiga delsteg (t.ex. kokare, kondensatorer)

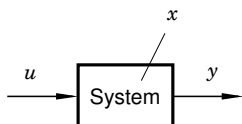
Processmodeller

I den här kursen kommer vi att huvudsakligen att jobba med processer som beskrivs av

- kontinuerliga** (alla variabler är reella),
- linjära** (till skillnad från olinjära, föreläsning 5),
- tidsinvarianta** (till skillnad från tidsvarierande),
- dynamiska** (till skillnad från statiska)

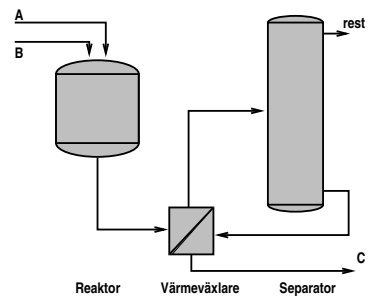
system

Statiskt eller dynamiskt system?



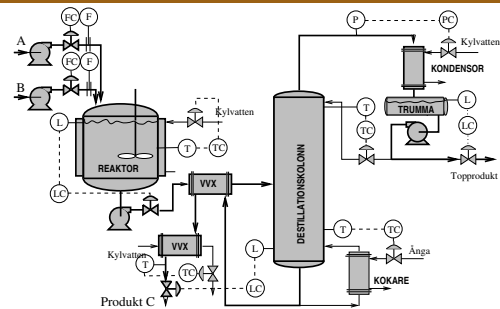
System	Insignal (u)	Utsignal (y)	S/D
Dusch	Flödesreglage	Vattenflöde	S
Dusch	Temperaturreglage	Vattentemperatur	D
Glödlampa	Strömbrytare	Ljus	S
Glödlampa	Dimmer	Ljus	S
Vattentank	Inflöde och utflöde	Vattennivå	D
Farthållning	Gaspådrag	Fart	D

Principiellt processschema



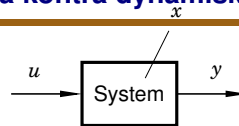
- ▶ Produktflöden, viktiga enhetsoperationer, principiell sekvens av operationer

Process- och instrumentdiagram (P/I diagram)



- ▶ Viktiga flöden (produkt- och energiflöden, signalflöden), enhetsoperationer och instrument ("alla" enheter, mätgivare, regulatorer och styrdon)

Statiska kontra dynamiska system



Statiskt system:

$$y(t) = f(u(t))$$

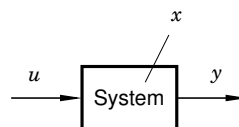
- ▶ Utsignalen just nu beror bara på insignalen just nu.
- ▶ Nytt jämviktsläge uppnås momentant efter förändringar i insignal.

Dynamiskt system:

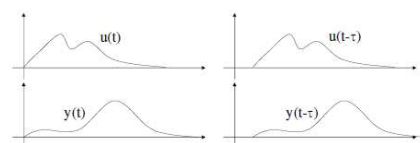
$$y(t) = f(u_{[0,t]}, x(0))$$

- ▶ Utsignalen beror på alla gamla insignaler och på systemets initialtillstånd.
- ▶ För (stabila) dynamiska system tar det tid innan nytt jämviktsläge uppnås efter förändringar i insignal.

Tidsinvarianta kontra tidsvarierande system



Tidsinvariant system: Systemets beteende ändras ej över tid. D.v.s. om insignalen (u) försenas τ tidsenheter, försenas även utsignalen (y) τ tidsenheter:



Exempel på tidsinvarianta och tidsvarierande system

Tidsvarierande system:

- Styrning av raket. Då mängden bränsle minskar, ändras systemets dynamik.
- Glödlampa med strömbrytare och timer. Olika respons på strömbrytartryck om timer aktiv eller ej.

Tidsinvarianta system

- Glödlampa med strömbrytare utan timer.
- Vattentank med in- och utflöden.
- Farthållning i bilen.

Tidsvarierande system (liksom tidsinvarianta) kan vara antingen statiska eller dynamiska.

Flödesbalanser

T.ex.

- volymflöde [m^3/s]

$$\left[\begin{array}{c} \text{Ändring av} \\ \text{upplagrad volym} \\ \text{per tidsenhet} \end{array} \right] = [\text{Inflöde}] - [\text{Utflöde}]$$

- materialflöde [mol/s]

$$\left[\begin{array}{c} \text{Ändring av antalet} \\ \text{upplagrade partiklar} \\ \text{per tidsenhet} \end{array} \right] = [\text{Inflöde av} \\ \text{partiklar}] - [\text{Utflöde av} \\ \text{partiklar}]$$

Intensitetsbalanser

T.ex.

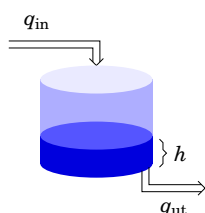
- kraftbalans [N]

$$\left[\begin{array}{c} \text{Ändring av} \\ \text{rörelsemängd} \\ \text{per tidsenhet} \end{array} \right] = [\text{Drivande} \\ \text{krafter}] - [\text{Bromsande} \\ \text{krafter}]$$

- spänningsbalans [V]

$$[\text{Summa spänning runt en krets}] = 0$$

Exempel: höjddynamik i tank med fritt utflöde



- Tankens tvärsnittsarea = A
- Utloppshålets area = a

Volymbalans:

$$A \frac{dh}{dt} = q_{in} - q_{ut}$$

Utflöde:

$$q_{ut} = av = a\sqrt{2gh}$$

Modell:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{a}{A}\sqrt{2gh} + \frac{1}{A}q_{in}$$

(1:a ordningens olinjärt system)

Modellering av dynamiska system

Dynamiken i våra system beskrivs typiskt med en eller flera differentialekvationer. Två olika metoder för modellering:

- Använd fysikens lagar (balansekvationer) för att ställa upp den matematiska modellen
- Utför experiment på systemet och analysera in- och ut-data
 - Föreläsning i Systemidentifiering (FRT041)

I praktiken används ofta en kombination av de båda metoderna

- energiflöde [W]

$$\left[\begin{array}{c} \text{Ändring av} \\ \text{upplagrad energi} \\ \text{per tidsenhet} \end{array} \right] = [\text{Effekt in}] - [\text{Effekt ut}]$$

- strömflöde [A]

$$\left[\begin{array}{c} \text{Summa ström in} \\ \text{till knutpunkt} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Summa ström ut} \\ \text{från knutpunkt} \end{array} \right]$$

För kemiska reaktioner brukar man skriva materialbalansen för varje komponent som

$$[\text{Inflöde}] + [\text{Produktion}] = [\text{Utflöde}] + [\text{Ackumulering}]$$

Konstitutiva relationer

T.ex.

- Ideala gaslagen

$$p = \frac{nR}{V}T$$

- Torricellis lag

$$v = \sqrt{2gh}$$

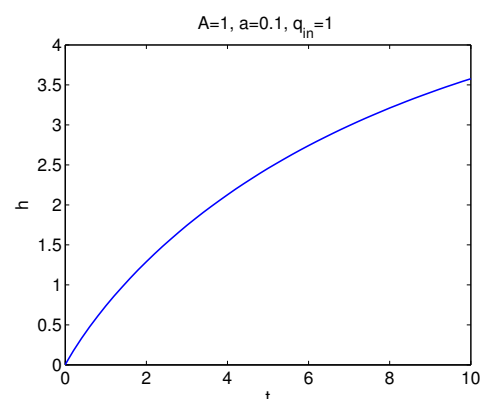
- Energi i uppvärmd vätska

$$W = c\rho VT$$

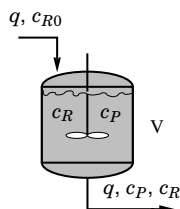
- Ohms lag

$$u = Ri$$

Simulering av tanken



Exempel: koncentrationsdynamik i tankreaktor



- Volym V , flöde q
- Första ordningens reaktion $R \rightarrow P$
- Reaktionshastighet $r_R = -r_P = -k_1 c_R$

Materialbalans:

$$\text{In} + \text{Prod} = \text{Ut} + \text{Ack}$$

$$q c_{R0} + V r_R = q c_R + V \frac{dc_R}{dt}$$

$$V r_P = q c_P + V \frac{dc_P}{dt}$$

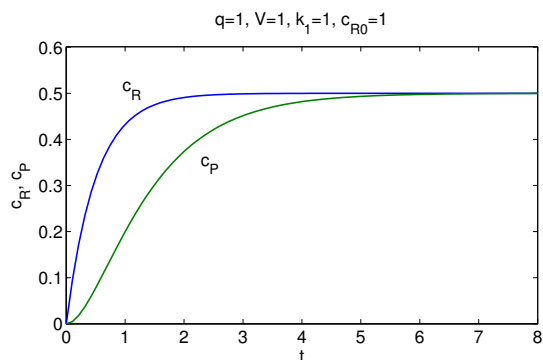
Modell:

$$\frac{dc_R}{dt} = -\left(\frac{q}{V} + k_1\right) c_R + \frac{q}{V} c_{R0}$$

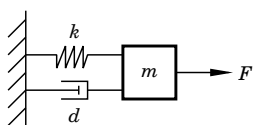
$$\frac{dc_P}{dt} = k_1 c_R - \frac{q}{V} c_P$$

(2:a ordningens linjärt system)

Simulering av tankreaktorn



Exempel: positionsdynamik för mekaniskt system



- Massa m med position z
- Yttre kraft: F
- Fjäderkraft: $F_k = kz$
- Dämparkraft: $F_d = d\dot{z}$

Kraftbalans:

$$m\ddot{z} = F - kz - d\dot{z}$$

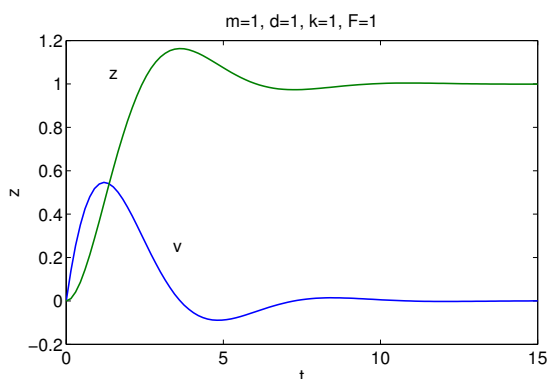
Inför $v = \dot{z} \Rightarrow$

$$\dot{v} = -\frac{d}{m}v - \frac{k}{m}z + \frac{1}{m}F$$

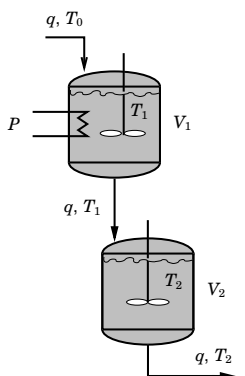
$$\dot{z} = v$$

(2:a ordningens linjärt system)

Simulering av mekaniska systemet



Exempel: temperaturdynamik i seriekopplade tankar



Energibalans:

$$c\rho V_1 \frac{dT_1}{dt} = P + c\rho q T_0 - c\rho q T_1$$

$$c\rho V_2 \frac{dT_2}{dt} = c\rho q T_1 - c\rho q T_2$$

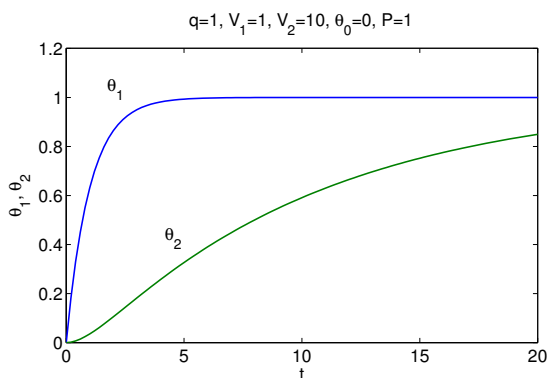
Modell:

$$\frac{dT_1}{dt} = -\frac{q}{V_1} T_1 + \frac{q}{V_1} T_0 + \frac{1}{c\rho V_1} P$$

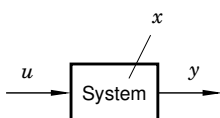
$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{q}{V_2} T_1 - \frac{q}{V_2} T_2$$

(2:a ordningens linjärt system)

Simulering av tankarna



Tillståndsformen



Generellt är x , u och y vektorer:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

n = antal tillståndsvariabler = systemets ordningstal (*order*)

m = antal insignaler, p = antal utsignaler

x kallas systemets tillstånd (*state*) och innehåller värdet av alla ackumulerade storheter i systemet (systemets "minne")

Systemets dynamik beskrivs av n första ordningens differentialekvationer:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{aligned}$$

Utsignalerna ges av p algebraiska ekvationer (anges inte alltid):

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ &\vdots \\ y_p &= g_p(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{aligned}$$

Systemet kan skrivas på vektorform som

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, u) & (\text{tillståndsekvation}) \\ y &= g(x, u) & (\text{mättekvation}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m \\ y_1 &= c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + \dots + d_{1m}u_m \\ &\vdots \\ y_p &= c_{p1}x_1 + \dots + c_{pn}x_n + d_{p1}u_1 + \dots + d_{pm}u_m \end{aligned}$$

På matrisform:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu & (\text{tillståndsekvation}) \\ y &= Cx + Du & (\text{mättekvation}) \end{aligned}$$

D kallas systemets direktterm och är ofta 0 för verkliga processer

Miniproblem: Vilka dimensioner har matriserna A , B , C och D ?

Exempel: koncentrationsdynamik i tankreaktor

Tillståndsvektor: $x = \begin{pmatrix} c_R \\ c_P \end{pmatrix}$

Antag att vi styr $u = c_{RO}$ och mäter $y = \begin{pmatrix} c_R \\ c_P \end{pmatrix}$

Dynamiken skriven på tillståndsform med matriser blir

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \underbrace{\begin{pmatrix} -(\frac{q}{V} + k_1) & 0 \\ k_1 & -\frac{q}{V} \end{pmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{q}{V} \\ 0 \end{pmatrix}}_B u \\ y &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_C x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_D u \end{aligned}$$

Exempel: positionsdynamik för mekaniska systemet

Tillståndsvektor: $x = \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}$

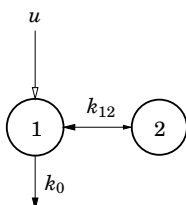
Antag att vi styr $u = F$ och mäter $y = z$

Dynamiken skriven på tillståndsform med matriser blir

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{d}{m} & -\frac{k}{m} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{pmatrix}}_B u \\ y &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}_C x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_D u \end{aligned}$$

- Systemet består av förbundna avdelningar (*compartments*)
- En tillståndsvariabel för varje avdelning representerar massan eller koncentrationen av det studerade ämnet
- Transporthastigheterna är proportionella mot koncentrationsskillnaderna

Exempel med två avdelningar:



Inför tillståndsvariablerna

c_1 = koncentrationen i avdelning 1

c_2 = koncentrationen i avdelning 2

Dynamiken ges då av

$$\begin{aligned} V_1 \frac{dc_1}{dt} &= k_{12}(c_2 - c_1) - k_0 c_1 + u \\ V_2 \frac{dc_2}{dt} &= k_{12}(c_1 - c_2) \end{aligned}$$

Antag $V_1 = V_2 = k_{12} = k_0 = 1$. Svar vid injektion av enhetsvolym ("impulssvar"):

