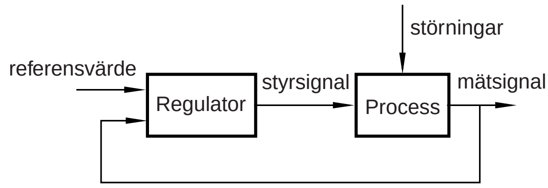
Systemteknik/Processreglering
Föreläsning 6

- Återkopplade system I
  - Exempel
  - Blockdiagramräkning
  - Analys av stationära fel

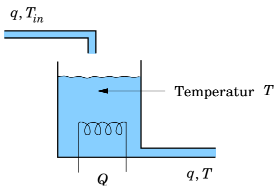
Läsanvisning: *Process Control:* 5.1–5.4

Sluten styrning



- Återkoppling från mätsignalen
- Regulatorn bestämmer styrsignalen så att
  - mätsignalen följer referensvärdet (servoproblemet)
  - störningarna undertrycks (regulatorproblemet)

Exempel: temperaturreglering i tank



Energibalans:

$$V\rho C_p \frac{dT(t)}{dt} = q\rho C_p (T_{in}(t) - T(t)) + Q(t)$$

Låt $K_1 = \frac{1}{q\rho C_p}$, $T_1 = \frac{V}{q}$ $\quad\Rightarrow$

$$T_1 \frac{dT(t)}{dt} + T = K_1 Q(t) + T_{in}(t)$$

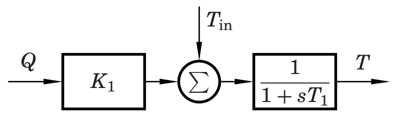
Laplacetransformera $\Rightarrow$

$$T(s) = \frac{1}{1+sT_1}\Big(K_1 Q(s) + T_{in}(s)\Big)$$

Linjär modell; T, Q, T_{in} betecknar avvikelser från ett jämviktsläge

Mål: Håll $T = T_{\text{ref}}$ med hjälp av Q trots variationer i T_{in}

Öppet system



Inverkan av stegstörning $T_{\text{in}} = 1$ (antag $Q = 0$):

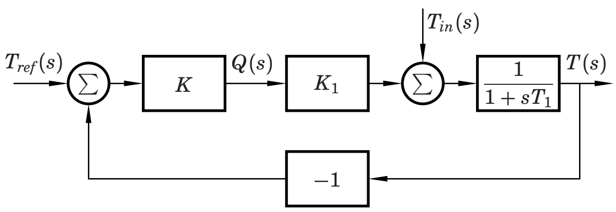
$$T(s) = \frac{1}{1+sT_1} \cdot \frac{1}{s}$$

$$T(t) = 1 - e^{-t/T_1}$$

Stationärt: $T = 1$

P-reglering

$$Q(t) = K\big(T_{ref}(t) - T(t)\big) = Ke(t)$$
$$Q(s) = K\big(T_{ref}(s) - T(s)\big) = KE(s)$$



P-reglering

$$T(s) = \frac{1}{1+sT_1}\Big(K_1 K\big(T_{ref}(s) - T(s)\big) + T_{in}(s)\Big)$$

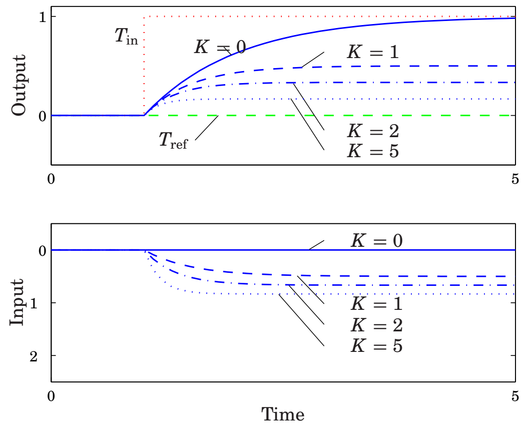
$$T(s) = \frac{K_1 K}{1+sT_1+K_1K} T_{ref}(s) + \frac{1}{1+sT_1+K_1K} T_{in}(s)$$

Pol:

$$s = -\frac{1+K_1K}{T_1}$$

Stationärt: $T = \dfrac{K_1K}{1+K_1K} T_{\text{ref}} + \dfrac{1}{1+K_1K} T_{\text{in}}$

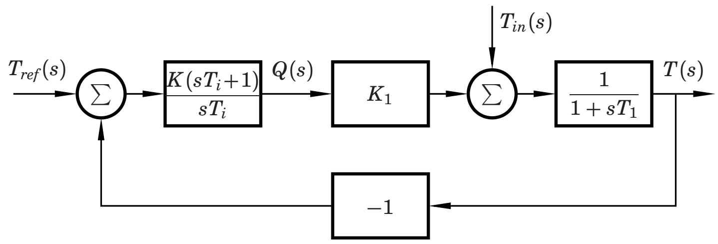
Simulering av stegstörning ($T_1 = K_1 = 1$):



PI-reglering

$$Q(t) = K\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int^t e(\tau)\,d\tau\right)$$

$$Q(s) = K\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)E(s)$$



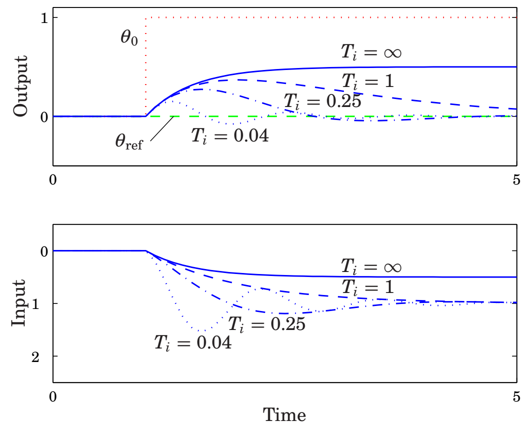
PI-reglering

$$T(s) = \frac{1}{1+sT_1}\left(\frac{K_1K(sT_i+1)}{sT_i}\Big(T_{ref}(s) - T(s)\Big) + T_{in}(s)\right)$$

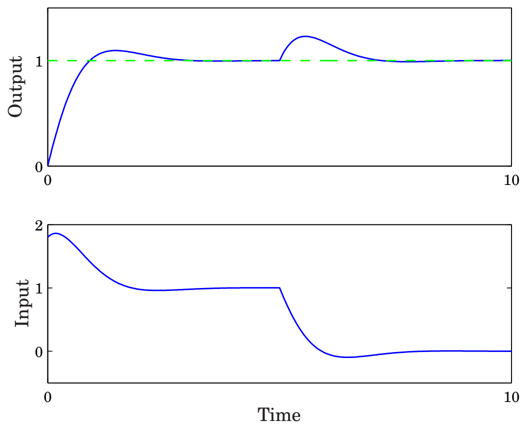
$$T(s) = \frac{K_1K(sT_i+1)}{s^2T_1T_i + s(K_1K+1)T_i + K_1K}T_{ref}(s) + \frac{sT_i}{s^2T_1T_i + s(K_1K+1)T_i + K_1K}T_{in}(s)$$

Stationärt: $T = T_{\text{ref}}$

Simulering av stegstörning ($T_1 = K_1 = K = 1$):



Simulering av referensändring, laststörning ($T = k = 1$, $K = 1.8$, $T_i = 0.45$):



Känslighet mot processvariationer

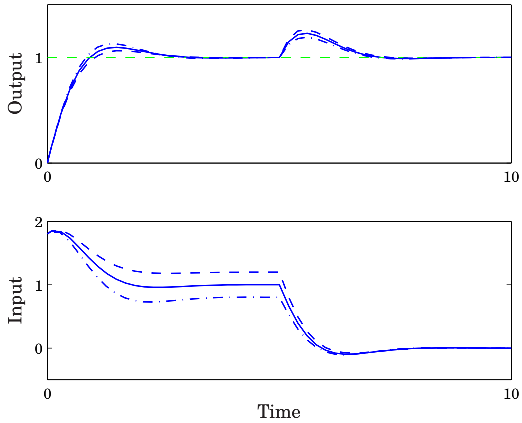
Med P-reglering är det slutna systemets statiska förstärkning

$$K_{cl} = \frac{K_1K}{1+K_1K}$$

$K = 5$: $\pm 10\%$ ändring av K_1 ger $K_{cl} = [0.82, 0.85]$

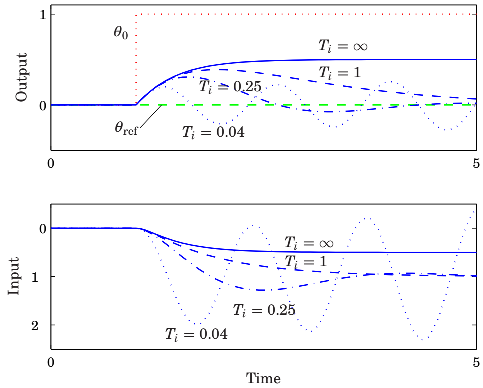
$K = 10$: $\pm 10\%$ ändring av K_1 ger $K_{cl} = [0.90, 0.92]$

Simulering av referensändring, laststörning ($K = 1.8$, $T_i = 0.45$, $\pm 20\%$ ändring av q):



Känslighet mot omodellerad dynamik

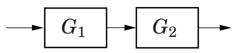
Antag mätdon m dynamik, $T_m(s) = \frac{1}{1+sT_m} T(s)$ ($T_m = 0.1$, $T_1 = K_1 = K = 1$)



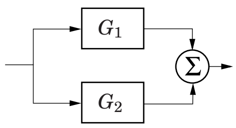
Blockdiagramräkning

Tre grundläggande kopplingar:

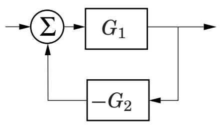
Seriekoppling:



Parallellkoppling:



Återkoppling:



Seriekoppling:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)$$

Parallellkoppling:

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

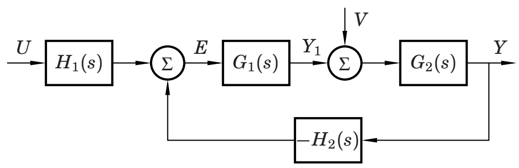
Återkoppling:

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

Räkna ut överföringsfunktioner från blockdiagram

- Räkna baklänges från den sökta utsignalen
- Sätt ointressanta insignaler till noll (superpositionsprincipen)
- Inför hjälpvariabler vid inre förgreningar/återkopplingar

Exempel



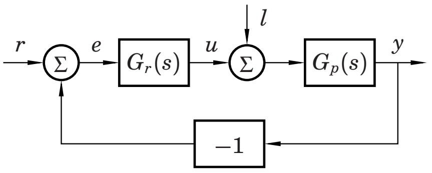
$$Y = G_2(V + Y_1)$$
$$Y_1 = G_1 E$$
$$E = H_1 U - H_2 Y$$

$$Y = G_2(V + G_1(H_1 U - H_2 Y))$$

Lös ut Y:

$$Y = \frac{G_1 G_2 H_1}{1 + G_1 G_2 H_2} U + \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H_2} V$$

Analys av stationära fel



Reglerfelet ges av

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_p(s)G_r(s)}R(s) - \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)G_r(s)}L(s)$$

Det stationära felet kan beräknas med slutvärdesteoremet:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) \quad \text{(om gränsvärdet existerar)}$$

Stationära fel – servoproblemet

Låt

$$G_0(s) = G_r(s)G_p(s) = \frac{K(1 + q_1 s + \cdots + q_{m-1}s^{m-1})}{s^n(1 + p_1 s + \cdots + p_m s^m)} = \frac{KQ(s)}{s^n P(s)}$$

(d.v.s. kretsöverföringsfunktionen G_0 innehåller n integratorer)

Då:

$$E(s) = \frac{s^n P(s)}{s^n P(s) + KQ(s)}R(s)$$

Antag $r(t)$ steg, $R(s) = a/s$:

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s^n P(s) a}{s^n P(s) + KQ(s)} = \begin{cases} \dfrac{a}{1+K} & n = 0 \\ 0 & n \geq 1 \end{cases}$$

Antag $r(t)$ ramp, $R(s) = b/s^2$:

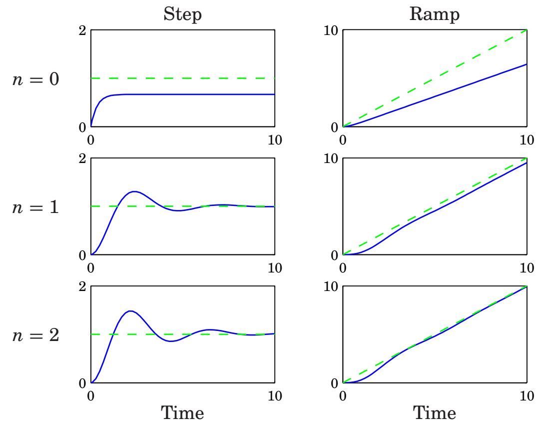
$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s^n P(s)}{s^n P(s) + KQ(s)} \cdot \frac{b}{s} = \begin{cases} \infty, & n = 0 \\ \dfrac{b}{K} & n = 1 \\ 0 & n \geq 2 \end{cases}$$

Slutsats:

- Felfri följning av stegreferens kräver 1 integrator i kretsöverföringsfunktionen
- Felfri följning av rampreferens kräver 2 integratorer i kretsöverföringsfunktionen

o.s.v.

Exempel



Stationära fel – regulatorproblemet

Antag

$$G_r(s) = \frac{K_1 Q_1(s)}{s^m P_1(s)}$$

$$G_p(s) = \frac{K_2 Q_2(s)}{s^{n-m} P_2(s)}$$

med $Q_1(0) = P_1(0) = Q_2(0) = P_2(0) = 0$

Då:

$$E(s) = -\frac{s^m K_2 P_1(s) Q_2(s)}{s^n P(s) + KQ(s)}L(s)$$

Antag $l(t)$ steg, $L(s) = a/s$:

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} -\frac{s^m K_2 P_1(s) Q_2(s) a}{s^n P(s) + KQ(s)} = \begin{cases} -aK_2/(1+K) & n = 0, m = 0 \\ -a/K_1 & n \geq 0, m = 0 \\ 0 & n \geq m, m \geq 1 \end{cases}$$

Antag $l(t)$ ramp, $L(s) = b/s^2$:

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} -\frac{s^m K_2 P_1(s) Q_2(s)}{s^n P(s) + KQ(s)} \cdot \frac{b}{s} = \begin{cases} -\infty & n \geq 0, m = 0 \\ -b/K_1 & n \geq m, m = 1 \\ 0 & n \geq m, m \geq 2 \end{cases}$$

Slutsats:

- Eliminering av stegstörning kräver 1 integrator i regulatorn
- Eliminering av rampstörning kräver 2 integratorer i regulatorn

o.s.v.