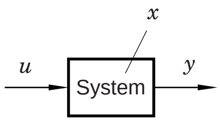
Systemteknik/Processreglering
Föreläsning 4

Linjär analys II

- Överföringsfunktion
- Impulssvar och stegsvar
- Samband mellan överföringsfunktion och stegsvar

Läsanvisning: *Process Control*: 3.6–3.8

Linjära tidsinvarianta system



- Tillståndsform:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

- Högre ordningens differentialekvation:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + p_1 \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_n y = q_0 \frac{d^m u}{dt^m} + q_1 \frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} + \cdots + q_m u$$

Överföringsfunktion

Antag alla initialvärden noll och Laplacetransformera diff.ekvationen:

$$(s^n + p_1 s^{n-1} + \cdots + p_n)Y(s) = (q_0 s^m + q_1 s^{m-1} + \cdots + q_m)U(s)$$

Inför

$$P(s) = s^n + p_1 s^{n-1} + \cdots + p_n$$
$$Q(s) = q_0 s^m + q_1 s^{m-1} + \cdots + q_m$$

Diff.ekvationen kan då skrivas som

$$P(s)Y(s) = Q(s)U(s)$$
$$Y(s) = \underbrace{\frac{Q(s)}{P(s)}}_{G(s)} U(s)$$

$G(s)$ kallas för systemets **överföringsfunktion** *(transfer function)*

Omvandling från tillståndsform till överföringsfunktion

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Antag initialtillståndet $x(0) = 0$.

Laplacetransformera:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$
$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Lös ut $X(s)$:

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$
$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Sätt in i ekvationen för $Y(s)$:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$
$$= \underbrace{\Big(C(sI - A)^{-1}B + D\Big)}_{G(s)} U(s)$$

Exempel: tankreaktorn

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{q}{V} + k_1\right) & 0 \\ k_1 & -\frac{q}{V} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{q}{V} \\ 0 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

Överföringsfunktion:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s + \frac{q}{V} + k_1 & 0 \\ -k_1 & s + \frac{q}{V} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{q}{V} \\ 0 \end{pmatrix} + 0$$
$$= \frac{\frac{q}{V}k_1}{(s + \frac{q}{V} + k_1)(s + \frac{q}{V})}$$

Poler och nollställen

Överföringsfunktionen $G(s)$ kan ofta skrivas som ett rationellt uttryck:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}, \quad \deg Q \leq \deg P$$

Nollställen *(zeros)*: rötter till $Q(s) = 0$

Poler *(poles)*: rötter till $P(s) = 0$ (karakteristiska ekvationen).

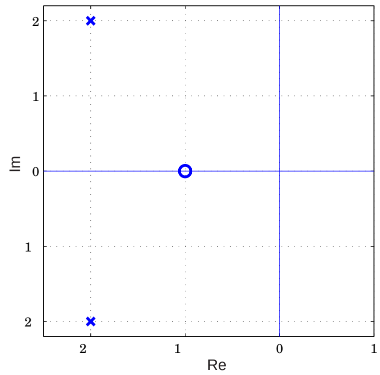
Man kan visa att $P(s) = \det(sI - A)$, d.v.s. poler till $G(s) \Leftrightarrow$ egenvärden till A!

Kan ritas i ett singularitetsdiagram/pol-nollställe-diagram *(singularity diagram/pole-zero map)*

- Poler: x
- Nollställen: o

Exempel:

$$G(s) = \frac{k(s+1)}{s^2 + 4s + 8}$$



Att räkna ut systemsvar med Laplacetransformen

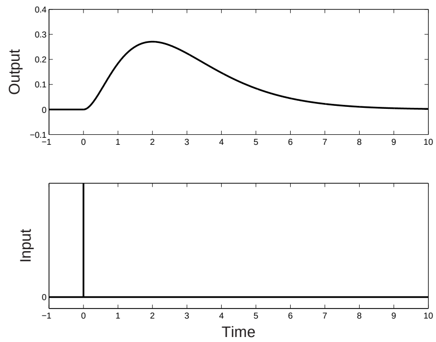
1. Hitta insignalens Laplacetransform $U(s) = \mathcal{L}\{u(t))\}$
2. Hitta systemets överföringsfunktion $G(s)$
3. Beräkna utsignalen i Laplace-domänen:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

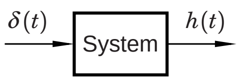
4. Använd invers Laplace-transform: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$

Impulssvar (*impulse response*)

Antag systemet i jämvikt. Hur reagerar utsignalen om insignalen ändras i form av en impuls?



Impulssvar för linjära system

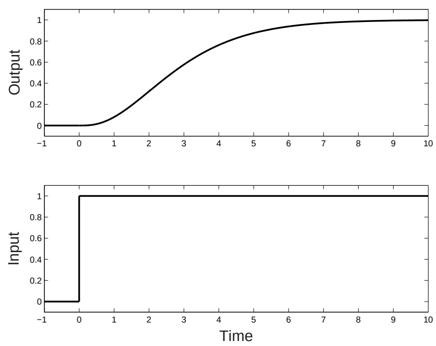


1. Laplace-transformera insignalen: $U(s) = 1$
2. Utsignalen blir
$$H(s) = G(s)U(s) = G(s)$$
3. Inverstransformering ger impulssvaret
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

$h(t)$ kallas även viktfunktion (*weighting function*)

Stegsvar (*step response*)

Antag systemet i jämvikt. Hur reagerar utsignalen om insignalen ändras i form av ett enhetssteg?



Stegsvar för linjära system

1. Laplace-transformera insignalen: $U(s) = \frac{1}{s}$
2. Utsignalen blir
$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\frac{1}{s}$$
3. Inverstransformering ger stegsvaret
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\frac{1}{s}\right\}$$

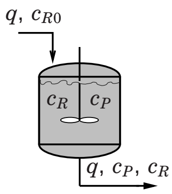
(Notera att $y(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau$)

Statisk förstärkning

Stegsvarets slutvärde kallas **statisk förstärkning** *(steady state gain/static gain)*.

För linjära system kan stegsvarets slutvärde beräknas med hjälp av **slutvärdesteoremet** (gränsvärdet existerar endast för asymptotiskt stabila system):
$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s}$$
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s} = G(0)$$

Exempel: tankreaktorn



- Volym V, flöde q
- Reaktion $R \to P$
- Reaktionshast. k_1

Överföringsfunktion från c_{RO} till c_P:
$$G(s) = \frac{\frac{q}{V}k_1}{(s + \frac{q}{V} + k_1)(s + \frac{q}{V})}$$

Statisk förstärkning:
$$G(0) = \frac{\frac{q}{V}k_1}{(\frac{q}{V} + k_1)\frac{q}{V}} = \frac{1}{\frac{q}{k_1 V} + 1}$$

Tolkning: Om c_{R0} ökar med 1, ökar c_P med $\frac{1}{\frac{q}{k_1 V}+1}$

Samband mellan överföringsfunktion och stegsvar

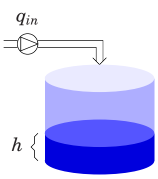
Typsystem:

- Integrator
- Första ordningens system
- Andra ordningens system med reella poler
- Andra ordningens system med komplexa poler
- Andra ordningens system med ett nollställe

Integrerande system

$$G(s) = \frac{K}{s}$$

Exempel: tank utan fritt utflöde:



- Tvärsnittsarea: A

Överföringsfunktion från q_{in} till h:
$$G(s) = \frac{1/A}{s}$$

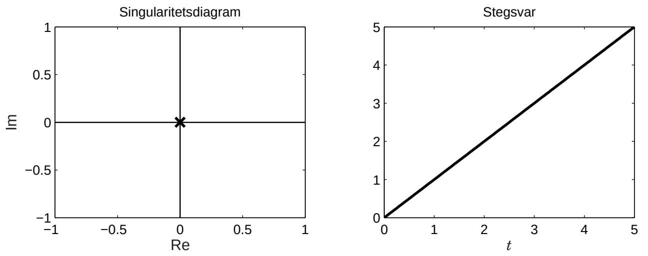
Integrerande system

Pol:
$$s = 0$$

Stegsvar:
$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{K}{s^2}$$
$$y(t) = Kt$$

Inget slutvärde, eftersom systemet är stabilt men inte asymptotiskt stabilt

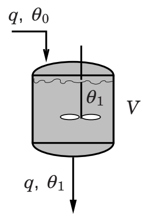
$K = 1$:



1:a ordningens system

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT}, \quad T > 0$$

Exempel: temperaturdynamik i en tank:



Överföringsfunktion från θ_0 till θ_1:

$$G(s) = \frac{1}{1 + s\frac{V}{q}}$$

1:a ordningens system

Pol:

$$s = -1/T$$

Stegsvar:

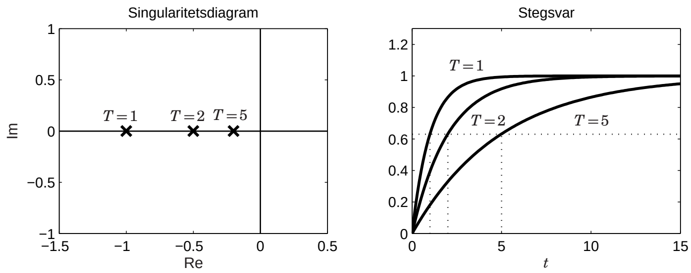
$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{K}{s(1 + sT)}$$

$$y(t) = K\left(1 - e^{-t/T}\right)$$

T kallas systemets **tidskonstant** *(time constant)*

$$y(T) = (1 - e^{-1})K \approx 0.63K$$

$K = 1$:

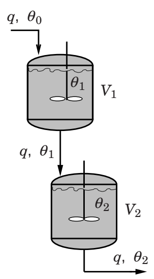


- Svarets snabbhet bestäms av polens avstånd från origo

2:a ordningens system med reella poler

$$G(s) = \frac{K}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}, \qquad T_1, T_2 > 0$$

Exempel: temperaturdynamik i kopplade tankar:



Överföringsfunktion från θ_0 till θ_2:

$$G(s) = \frac{1}{(1 + s\frac{V_1}{q})(1 + s\frac{V_2}{q})}$$

2:a ordningens system med reella poler

Poler:

$$s = -1/T_1, \quad s = -1/T_2$$

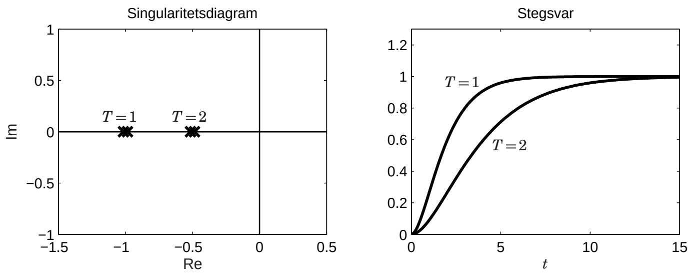
Stegsvar:

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{K}{s(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$

$$y(t) = \begin{cases} K\left(1 - \dfrac{T_1 e^{-t/T_1} - T_2 e^{-t/T_2}}{T_1 - T_2}\right), & T_1 \neq T_2 \\ K\left(1 - e^{-t/T} - \dfrac{t}{T}e^{-t/T}\right), & T_1 = T_2 = T \end{cases}$$

Två tidskonstanter: $T_1,\ T_2$

$K = 1$:

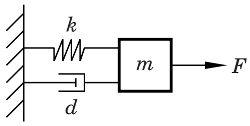


- Två poler ger mjukare och långsammare svar än en enkelpol (ekvivalent tidskonstant $T_{eq} = T_1 + T_2$)
- Om $T_1 \gg T_2$ så beter sig systemet i princip som ett 1:a ordningens system med tidskonstant T_1

2:a ordningens system med komplexa poler

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}, \qquad \omega_0 > 0,\ 0 < \zeta < 1$$

Exempel: positionsdynamik för mekaniskt system:



Överföringsfunktion från F till z:

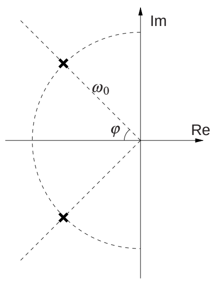
$$G(s) = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{k}{m}}$$

Komplexa poler om $d^2 < 4km$

2:a ordningens system med komplexa poler

Poler:

$$s = -\zeta\omega_0 \pm i\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_0$$

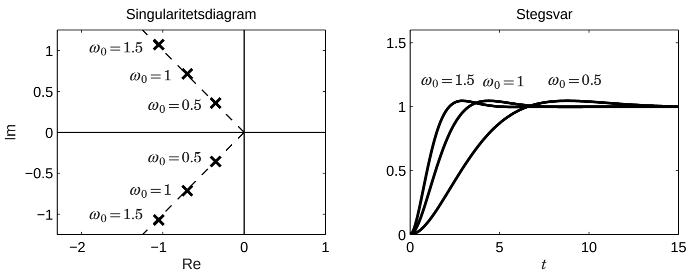


$$\zeta = \cos\varphi$$

Stegsvar:

$$y(t) = K\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin\left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \arccos\zeta\right)\right)$$

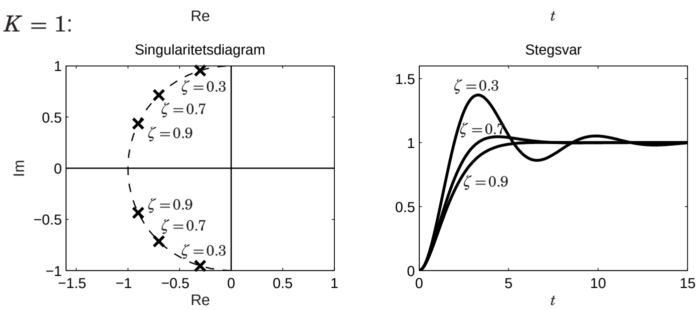
$K = 1$:



- Svarets snabbhet bestäms av polernas avstånd från origo

Im

$K = 1$:



- Svarets dämpning bestäms av polernas vinkel

Inverkan av nollställe

Antag systemet

$$(1 + sT_z s)G_0(s)$$

med ett nollställe i $s = -\frac{1}{T_z}$

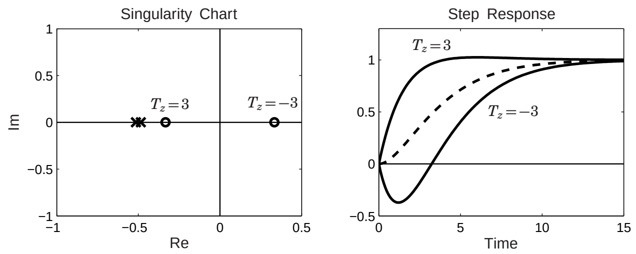
Stegsvar:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G_0(s)\frac{1}{s}\right\} + T_z\mathcal{L}^{-1}\{G_0(s)\}$$

Viktad summa av stegsvaret och impulssvaret för $G_0(s)$

Stor inverkan om nollstället nära origo

2:a ordningens system med nollställe, $G(s) = \frac{1+sT_z}{(1+2s)^2}$



Streckat stegsvar för systemet $G_0(s) = \frac{1}{(1+2s)^2}$

Nollstället påverkar initialbeteendet

Nollställe i höger halvplan ger stegsvar som börjar på ”fel” håll

Tolkning av poler och nollställen

Poler

- Beror bara på A-matrisen, d.v.s. på systemets inre dynamik
- Bestämmer systemets
  - stabilitet
  - snabbhet
  - dämpning

Nollställen

- Mera svårtolkade
- Beror på hur in- och utsignalen är kopplade till systemet, d.v.s. även på B-, C- och D-matriserna
- Inverkar främst på systemsvarets initialbeteende

Överföringsfunktion och systemsvar i Matlab

```
% Definiera en överföringsfunktion
sys = tf([1 0.5],[1 1.5 1])   % (s+0.5)/(s^2+1.5s+1)

% Räkna ut poler och nollställen
pole(sys)
zero(sys)

% Rita singularitetsdiagram
pzmap(sys)

% Rita impulssvar och stegsvar
impulse(sys)
step(sys)
```