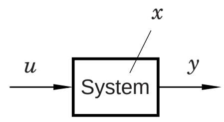
Systemteknik/Processreglering
Föreläsning 3

Linjära system I

- Lösning av tillståndsekvationen
- Stabilitet
- Laplacetransformen

Läsanvisning: *Process Control*: 3.1–3.5

Linjära tidsinvarianta system



Linjärt tidsinvariant system på tillståndsform:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Insignal-utsignal-sambandet kan alternativt beskrivas med en n:te ordningens differentialekvation:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_n y = q_0 \frac{d^m u}{dt^m} + q_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + q_m u$$

Lösning av tillståndsekvationen – skalära fallet

System med en tillståndsvariabel och en insignal:

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bu(t)$$

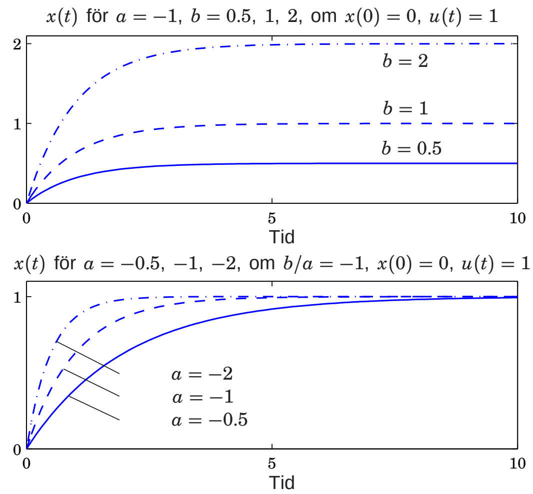
Lösning:

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau)\, d\tau$$

Exempel: Konstant insignal $u(t) = u_0$ och $a \neq 0$:

$$x(t) = e^{at}x(0) + \frac{b}{a}(e^{at} - 1)u_0$$

$x(t)$ begränsad om $a < 0$



Lösning av tillståndsekvationen – allmänna fallet

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau$$

där e^{At} är matrisexponentialfunktionen, definierad som

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots$$

Egenvärden

A:s egenvärden ges av de n rötterna till den karakteristiska ekvationen

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$\det(\lambda I - A) = P(\lambda)$ kallas karakteristiskt polynom

Egenvärdena kan vara komplexa (komplexkonjugerade)

Multiplicitet av egenvärde = antal egenvärden med samma värde

Antag diagonal A-matris med egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Då

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Varje egenvärde λ_i ger en term $e^{\lambda_i t}$ i lösningen

För en generell A-matris ger varje egenvärde en term $P_{m_i-1}(t)e^{\lambda_i t}$ där

- $P_{m_i-1}(t)$ är ett polynom i t av högst gradtal $m_i - 1$
- m_i är egenvärdets multiplicitet

Exempel:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Egenvärden:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \quad (m = 2)$$

Exponentialmatris:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Stabilitet

Stabilitet är en inneboende systemegenskap – beror ej på hur insignalen ser ut

Vi kan studera det fria systemet

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

Lösning:

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

Stabilitetsbegrepp

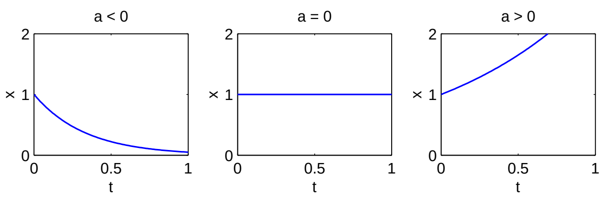
Asymptotisk stabilitet: $x(t) \to 0$ då $t \to \infty$ för alla initialvärden

Stabilitet: $x(t)$ begränsad då $t \to \infty$ för alla initialvärden

Instabilitet: $x(t)$ obegränsad då $t \to \infty$ för något initialvärde

Exempel: skalärt system

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$$
$$x(t) = e^{at}x(0)$$



- asymptotiskt stabilt om $a < 0$
- stabilt om $a \leq 0$
- instabilt om $a > 0$

Stabilitetsvillkor – allmänna fallet

Egenvärdena λ_i till A-matrisen avgör stabiliteten:

- Ett linjärt system är asymptotiskt stabilt om alla $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$
- Ett linjärt system är instabilt om något $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$
- Ett linjärt system är stabilt om alla $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0$ och eventuella egenvärden på imaginära axeln har multiplicitet 1

Routh–Hurwitz stabilitetskriterum

2:a ordningens karakteristiskt polynom:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2$$

Alla rötter ligger i vänster halvplan om och endast om $p_1 > 0$ och $p_2 > 0$

3:e ordningens karakteristiskt polynom:

$$P(\lambda) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3$$

Alla rötter ligger i vänster halvplan om och endast om $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $p_3 > 0$ och $p_1p_2 > p_3$.

Exempel: tankreaktorn

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{q}{V} + k_1\right) & 0 \\ k_1 & -\frac{q}{V} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{q}{V} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

Eftersom A-matrisen är triangulär så ges egenvärdena direkt av diagonalelementen:

$$\lambda_1 = -\left(\tfrac{q}{V} + k_1\right), \qquad \lambda_2 = -\tfrac{q}{V}$$

Asymptotiskt stabilt (givet att $q, V, k_1 > 0$)

Exempel: mekaniska systemet

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{m} & -\frac{k}{m} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

Egenvärden:

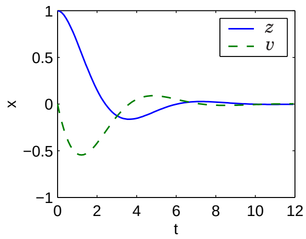
$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k}{m} & \lambda + \frac{d}{m} \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{d}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{d}{2m} \pm \frac{\sqrt{d^2 - 4mk}}{2m}$$

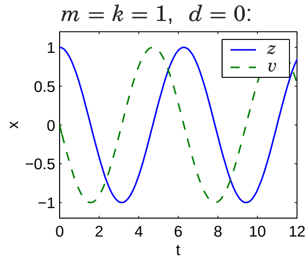
Antag $m, k > 0$. Asymptotiskt stabilt om $d > 0$, stabilt om $d \geq 0$

Simulering av mekaniska systemet

$m = k = d = 1$:



$m = k = 1, \ d = 0$:



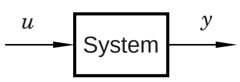
Linjära system på tillståndsform i MATLAB

```
% Definiera systemmatriser
A = [1 2; 3 4];
B = [0; 1];
C = [1 0];
D = 0;

% Skapa tillståndsmodell
sys = ss(A,B,C,D);

% Beräkna egenvärden till A-matrisen
eig(A)

% Simulera systemet utan insignal från ett visst initialvärde
initial(sys,x0)
```


Laplacetransformen

Ett kraftfullt matematiskt verktyg för att studera och lösa linjära differentialekvationer

T.ex.



Vad blir utsignalen $y(t)$ givet en viss insignal $u(t)$?

Lösning av differentialekvationer utan Laplacetransformen

Exempel: 2:a ordningens inhomogen linjär differentialekvation:

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = u(t)$$

1. Finn alla lösningar till homogena ekvationen $\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0$
   – Lös karakteristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0 \;\;\Rightarrow\;\; r_1, r_2$
   – Homogen lösning:

$$y_h = \begin{cases} C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, & r_1 \neq r_2 \\ (C_1 t + C_2) e^{r_1 t}, & r_1 = r_2 \end{cases}$$

2. Finn en partikulärlösning y_p till inhomogena ekvationen
   – Olika *lösningsansatser* beroende på $u(t)$
3. Alla lösningar ges av
$$y = y_h + y_p$$
4. Bestäm C_1 och C_2 med hjälp av eventuella begynnelsevillkor

Ganska omständligt. . .

Laplacetransformen

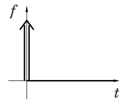
Omvandlar en funktion $f(t)$ till en annan funktion $F(s)$.

- $f(t)$ är en funktion av tiden $t \geq 0$
- $F(s)$ är en funktion av den “komplexa frekvensen” s

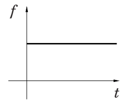
Definition:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

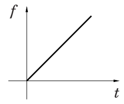
Några vanliga funktioner (signaler)



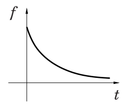
$f(t) = \delta(t)$ Impuls



$f(t) = 1$ Steg (konstant signal)



$f(t) = t$ Ramp



$f(t) = e^{-at}$ Exponentialfunktion

Impulsfunktionen $\delta(t)$

- Impuls vid tiden 0
- Oändligt hög och oändligt smal, men med arean 1:

$$p_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon & 0 \leq t < \epsilon \\ 0 & t \geq \epsilon \end{cases}$$

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} p_\epsilon(t)$$

Exempel:

$$\frac{dV}{dt} = \delta(t)$$

Tolkning: “Injektion av en enhetsvolym vid tiden noll”

Laplacetransformen av några vanliga funktioner

Impuls:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^\infty \delta(t) e^{-st} dt = 1$$

Steg:

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

Exponentialfunktion:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \int_0^\infty e^{-at} \cdot e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right]_0^\infty = \frac{1}{s+a}$$

Utdrag ur formelsamlingen s. 6:

	Laplacetransform $F(s)$	Tidsfunktion $f(t)$	
1	1	$\delta(t)$	Diracfunktion
2	$\frac{1}{s}$	1	Stegfunktion
3	$\frac{1}{s^2}$	t	Rampfunktion
6	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	
24	$\frac{ab}{s(s+a)(s+b)}$	$1+\frac{ae^{-bt}-be^{-at}}{b-a}$	

Några viktiga egenskaper hos Laplacetransformen

Utdrag ur formelsamlingen s. 5:

	Laplacetransform $F(s)$	Tidsfunktion $f(t)$	
1	$\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)$	$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)$	Linjäritet
8	$sF(s)-f(0)$	$f'(t)$	Derivering i t-planet
9	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$	$f''(t)$	
12	$\frac{1}{s}F(s)$	$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	Integration i t-planet

Fler viktiga egenskaper

Utdrag ur formelsamlingen s. 5:

	Laplacetransform $F(s)$	Tidsfunktion $f(t)$	
14	$\lim_{s\to 0} sF(s)$	$\lim_{t\to\infty} f(t)$	Slutvärdesteoremet
15	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$	$\lim_{t\to 0} f(t)$	Begynnelsevärdes-teoremet

OBS! Får bara användas om gränsvärdet i tidsdomänen existerar!

Arbetsgång för att lösa differentialekvationer med hjälp av Laplacetransformen

1. Laplace-transformera alla termer i ekvationen
   - Använd formelsamlingen
2. Lös ut $Y(s)$
3. Använd invers Laplace-transform för att hitta $y(t)$
   - Partialbråksuppdela först om det behövs
   - Använd formelsamlingen

Exempel 1

Lös

$$\dot{y}+3y=0$$

med begynnelsevillkoret $y(0)=5$.

1. Laplacetransformera:

$$sY(s)-5+3Y(s)=0$$

2. Lös ut $Y(s)$:

$$(s+3)Y(s)=5$$

$$Y(s)=\frac{5}{s+3}=5\cdot\frac{1}{s+3}$$

3. Invers Laplace (transform nr. 6):

$$y(t)=5e^{-3t}$$

Exempel 2

Lös

$$\ddot{y}+3\dot{y}+2y=1$$

med begynnelsevillkoret $y(0)=\dot{y}(0)=0$.

1. Laplacetransformera:

$$s^2Y(s)+3sY(s)+2Y(s)=\tfrac{1}{s}$$

2. Lös ut $Y(s)$:

$$(s^2+3s+2)Y(s)=\tfrac{1}{s}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s(s^2+3s+2)}=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

3. Invers Laplace (transform nr. 24):

$$y(t)=\frac{1}{2}+\frac{e^{-2t}-2e^{-t}}{2}$$