

Systemteknik/Processreglering

Inlämningsuppgift 1

Analys och simulering av koncentrationsdynamik

Bo Bernhardsson

Institutionen för reglerteknik

Lunds tekniska högskola

April 2001

Senast reviderad: Mars 2011

1. Inledning

Syftet med uppgiften är att studera en klass av system, kompartmentmodeller, som är viktiga inom fysik, kemi, biologi, farmakokinetik, etc. Grundläggande begrepp och principer inom systemtekniken dyker upp, såsom tillståndsmodeller, överföringsfunktioner, poler, nollställen, impulssvar, stegsvar och återkoppling.

För att lösa uppgiften kommer ni att använda MATLAB och Control System Toolbox.

Uppgiften utförs i grupper om tre teknologer och är tänkt att motsvara cirka en dags arbete.

Bakgrund

För att klara uppgiften behöver ni känna till följande begrepp:

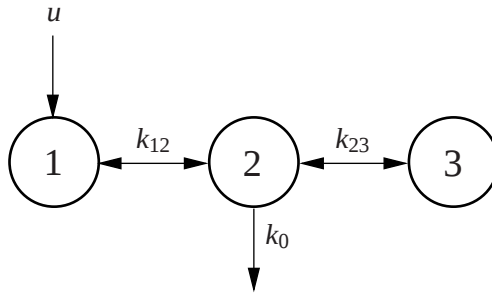
- tillståndsmodell
- överföringsfunktion
- poler och nollställen
- stabilitet
- öppet resp. slutet system

Mer information om kompartmentmodeller finns i Åström & Murray: *Feedback Systems*: kapitel 3.6 ("Drug Administration").

2. Problemställning

Vi ska undersöka egenskaperna hos ett kompartmentssystem med tre kammare, se figur 1. Modellen kan t.ex. representera hur en huvudvärkstablett absorberas i kroppen. Kamrarna 1, 2 och 3 kan representera magen, blodomloppet och hjärnan, medan utloppet från kammare 2 kan representera avsöndringen av läkemedel från blodomloppet till njurar och lever. Det var en professor i medicinsk kemi vid Lunds universitet, Erik Widmark, som på tidigt 1900-tal utvecklade en av de första kompartmentmodellerna för att studera hur alkohol upptas av kroppen.

Uppgift 1. *Kompartmentsystem kan beskriva många olika situationer. Tänk igenom tidigare kurser inom ert utbildningsprogram och försök hitta situationer/problemställningar som kan beskrivas med kompartmentmodeller.* □



Figur 1 Ett kompartmentsystem med tre kammare. Insignalen u beskriver injektion av ett ämne i kammare 1. Parametrarna k_{12} och k_{23} bestämmer utbytet mellan närliggande kammare, medan parametern k_0 bestämmer avsöndringen från kammare 2.

Matematisk modell

Låt V_i vara volymen av kammare i , och låt c_i representera koncentrationen av ämne i kammare i . Ekvationerna för systemet i figur 1 kan då skrivas

$$\begin{aligned} V_1 \frac{dc_1}{dt} &= k_{12}(c_2 - c_1) + u \\ V_2 \frac{dc_2}{dt} &= k_{12}(c_1 - c_2) + k_{23}(c_3 - c_2) - k_0 c_2 \\ V_3 \frac{dc_3}{dt} &= k_{23}(c_2 - c_3) \end{aligned}$$

Som utsignal kan vi välja att betrakta koncentrationen i någon av kamrarna, d.v.s. vi kan välja mellan $y_1 = c_1$, $y_2 = c_2$ eller $y_3 = c_3$.

Inför tillståndsvektorn

$$x = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Systemet kan då skrivas på tillståndsform som

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y_i &= C_i x \end{aligned} \tag{1}$$

där dynamik- och insignalmatrisen ges av

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-k_{12}}{V_1} & \frac{k_{12}}{V_1} & 0 \\ \frac{k_{12}}{V_2} & \frac{-k_{12}-k_{23}-k_0}{V_2} & \frac{k_{23}}{V_2} \\ 0 & \frac{k_{23}}{V_3} & \frac{-k_{23}}{V_3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{V_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

och där utsignalmatrisen kan vara någon av

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Uppgift 2. Den matematiska modellen är linjär. Ge ett par exempel på olinjäriteter som kan förekomma i verkliga kompartmentsystem men som inte täcks in av modellen. $\square$

3. Undersökning av systemet

Vi utgår från följande parameteruppsättning:

$$\text{Fall 1: } V_1 = V_2 = V_3 = k_{12} = k_{23} = k_0 = 1$$

Uppgift 3. Mata in systemet in MATLAB som tre olika tillståndsmodeller (svarande mot de tre olika mätsignalerna), se kodskelettet i appendix A.

Beräkna systemets överföringsfunktioner $G_1(s)$ (från u till y_1), $G_2(s)$ (från u till y_2) och $G_3(s)$ (från u till y_3). Vilka poler och nollställen har $G_1(s)$, $G_2(s)$ och $G_3(s)$? ☐

Uppgift 4. Beräkna egenvärdena till matrisen A . Jämför med polerna i föregående uppgift. Är systemet stabilt? Asymptotiskt stabilt? ☐

Uppgift 5. Plotta impulssvaret för $G_1(s)$, $G_2(s)$ och $G_3(s)$ i en figur. Kommentera beteendet. Verkar det rimligt? ☐

Uppgift 6. Plotta stegsvaret för $G_1(s)$, $G_2(s)$ och $G_3(s)$ i en figur. Kommentera beteendet. Verkar det rimligt? (Tips: Fundera på hur nettotransporten av ämnet ser ut i jämvikt.)

Inget utlopp

Vi ska nu studera vad som händer om det inte finns något utlopp från systemet. Använd följande parameteruppsättning:

$$\text{Fall 2: } V_1 = V_2 = V_3 = k_{12} = k_{23} = 1, \quad k_0 = 0$$

Uppgift 7. Beräkna de nya överföringsfunktionerna $G_1(s)$, $G_2(s)$ och $G_3(s)$. Beräkna egenvärdena till matrisen A . Är systemet stabilt? Asymptotiskt stabilt? ☐

Uppgift 8. Plotta impulssvaret för $G_1(s)$, $G_2(s)$ och $G_3(s)$ i en figur. Kommentera beteendet. Verkar det rimligt? ☐

Snabbare utbyte mellan kammare 2 och 3

Vi ska nu studera vad som händer om utbytet mellan kammare 2 och 3 blir 20 gånger snabbare jämfört med fall 1. Använd följande parameteruppsättning:

$$\text{Fall 3: } V_1 = V_2 = V_3 = k_{12} = k_0 = 1, \quad k_{23} = 20$$

Uppgift 9. Beräkna de nya överföringsfunktionerna $G_1(s)$, $G_2(s)$ och $G_3(s)$, samt deras poler och nollställen. Var ligger den snabbaste polen? Jämför med uppgift 2. ☐

Uppgift 10. Plotta impulssvaret för $G_1(s)$, $G_2(s)$ och $G_3(s)$ i en figur. Kommentera beteendet. Verkar det rimligt? ☐

4. Reglering

Antag att vi vill göra en automatisk reglering av koncentrationen i kammare 3, så att koncentrationen y_3 närmar sig referensvärdet $r = 1$. För att åstadkomma detta kan vi göra en proportionell återkoppling från reglerfelet $e = r - y_3$:

$$u = K(r - y_3) \quad (2)$$

Uppgift 11. Sätt in styrlagen (2) i modellen (1) (med $i = 3$) och ställ upp det slutna systemet på matrisform. Det slutna systemet har insignalen r och utsignalen y_3 .

Antag sedan parameteruppsättningen i fall 1 och de två olika förstärkningarna $K = 1$ och $K = 10$. Mata in de två olika slutna systemen i MATLAB och plotta deras stegsvar i samma figur. Jämför och kommentera beteendet i de båda fallen.

Undersök till sist hur stort K kan vara utan att det slutna systemet blir instabilt. □

A. Kodskelett

```
% Definiera modellparametrar
V1 = ... ;
V2 = ... ;
V3 = ... ;
k12 = ... ;
k23 = ... ;
k0 = ... ;

% Definiera systemmatriser
A = ... ;
B = ... ;
C1 = ... ;
C2 = ... ;
C3 = ... ;
D = ... ;

% Definiera tillståndsmodeller
sys1 = ss(A,B,C1,D);
sys2 = ss(A,B,C2,D);
sys3 = ss(A,B,C3,D);
```

Lista på användbara MATLAB-kommandon (se även övning 4)

```
help
ss
tf
pole
zero
eig
impulse
step
legend
title
```

Tips: Både `impulse` och `step` kan plotta flera systemsvar samtidigt, t.ex.

```
>> impulse(sys1,sys2,sys3)
>> step(sys1,sys2,sys3)
```