

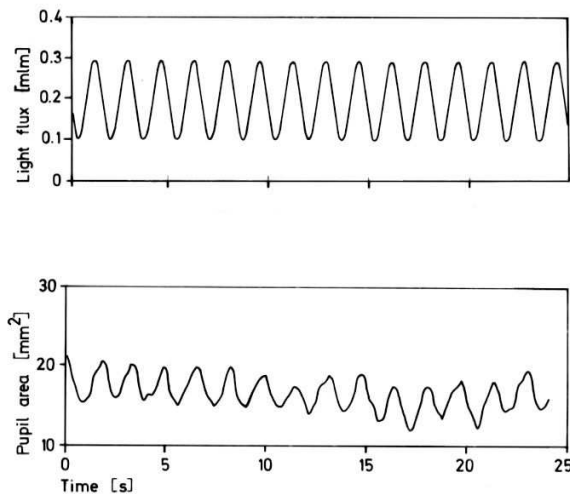
Föreläsning 8

Frekvensanalys

- Frekvenssvar
- Bode- och Nyquistdiagram
- Stabilitet och stabilitetsmarginaler

Rekommenderad läsning: *Process Control*: 3.8, 4.5

Exempel: experiment på ögats pupill



[L. Stark, 1959]

Frekvensanalys

Studera hur system reagerar på signaler i olika frekvensområden

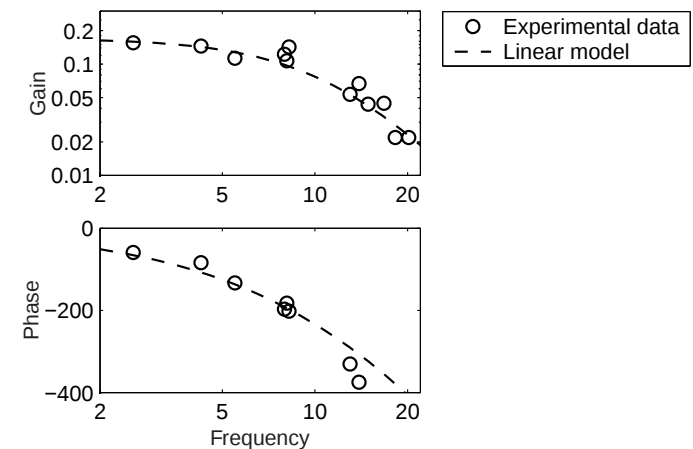
Exempel:

- Laststörningar – mest låga frekvenser
- Mätbrus – höga frekvenser

Om systemet är linjärt så kan man studera svaret för varje frekvens separat

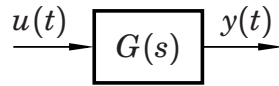
- Sinus in $\Rightarrow$ sinus ut
- Kan t.ex. användas för att ta fram överföringsfunktioner experimentellt (systemidentifiering)

Upprepade experiment för olika frekvenser:



Linjär modell $G(s) = \frac{0.17}{(1+0.08s)^3} e^{-0.2s}$ anpassad till data

Frekvenssvar



$$u(t) = \sin \omega t, \quad t > -\infty$$

$$y(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = |G(i\omega)|$$

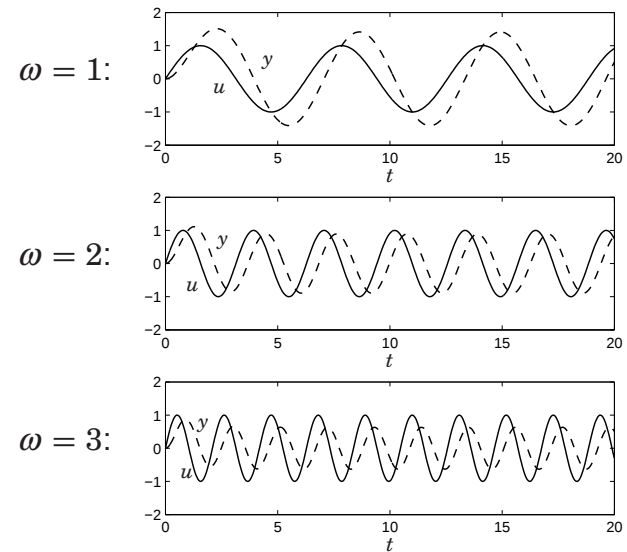
$$\varphi = \arg G(i\omega)$$

$G(i\omega)$ – frekvensfunktion

$|G(i\omega)|$ – förstärkning (*gain*), amplitud, magnitud

$\arg G(i\omega)$ – fasförskjutning (*phase shift*), fas

Exempel: $G(s) = \frac{2}{s+1}$



Räkneregler för komplexa tal

$$z = x + iy$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\arg z = \arctan \frac{y}{x} \quad (\text{om } x > 0)$$

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

Exempel: $G(s) = \frac{2}{s+1}$

$$G(i\omega) = \frac{2}{i\omega + 1}$$

$$|G(i\omega)| = \frac{2}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$\arg G(i\omega) = -\arctan \omega$$

ω	$ G(i\omega) $	$\arg G(i\omega)$
0	1	0°
1	1.41	-45°
∞	0	-90°

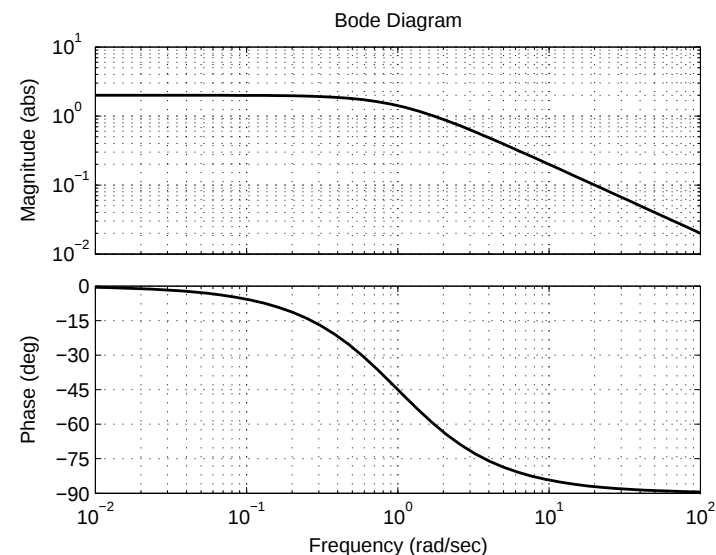
Bodediagram

Rita $|G(i\omega)|$ och $\arg G(i\omega)$ som funktioner av ω

- Amplitudkurvan $|G(i\omega)|$ ritas i log-log-skala
- Faskurvan $\arg G(i\omega)$ ritas i log-lin-skala

(MATLAB-kommando: bode)

Exempel: $G(s) = \frac{2}{s+1}$



Miniproblem

Avläs i Bodediagrammet:

- Hur mycket förstärks och fasförskjuts insignaler med frekvensen 10 rad/s?
- Hur mycket förstärks och fasförskjuts konstanta insignaler?

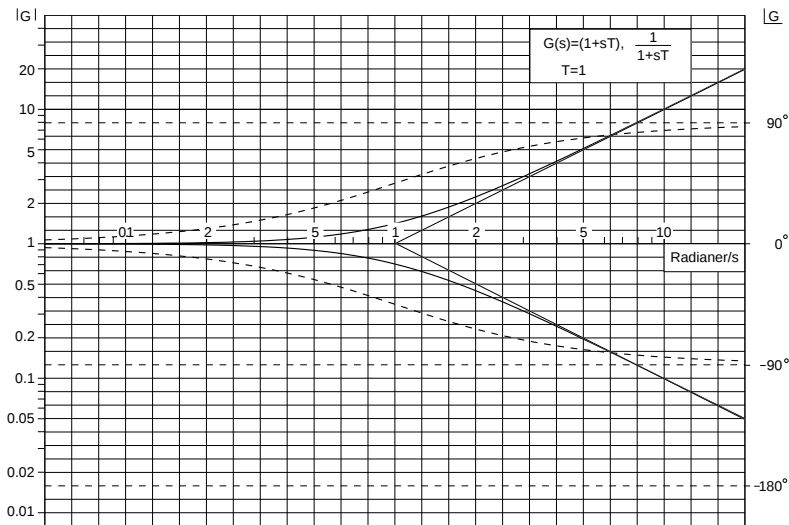
Typsystem i formelsamlingen

$$\frac{1}{1+sT}, \quad 1+sT \quad \text{reell pol, reellt nollställe}$$

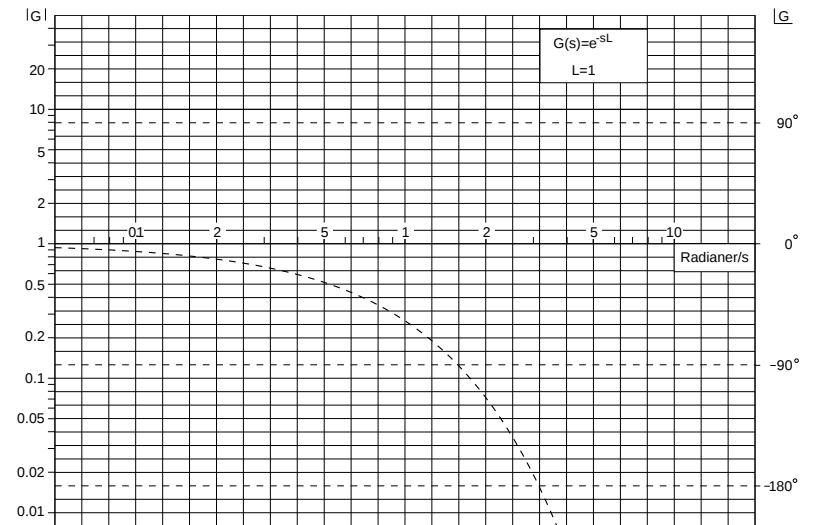
$$e^{-sL} \quad \text{tidsfördröjning}$$

$$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2} \quad \text{komplext polpar}$$

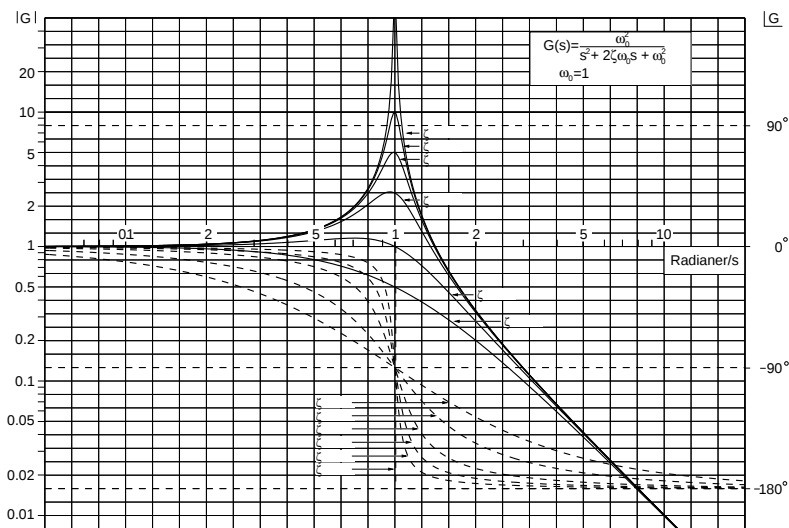
(Ni behöver ej kunna rita Bodediagram för hand, s. 85–91 i *Process Control*.)



- En pol i $s = -\frac{1}{T}$ böjer ner amplitudkurvan och sänker faskurvan med 90° vid $\omega = \frac{1}{T}$; omvänt för ett nollställe



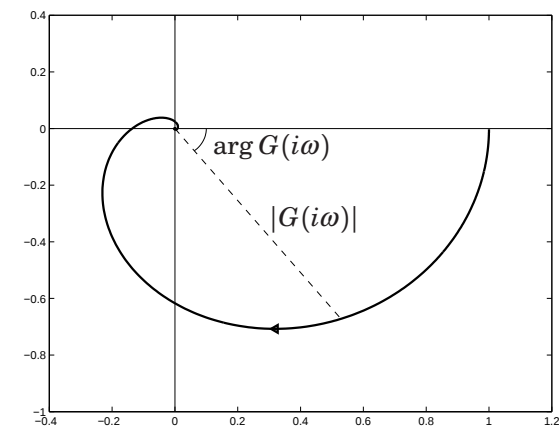
- En tidsfördröjning sänker faskurvan exponentiellt men påverkar inte amplitudkurvan



- Ett oscillativt system med liten dämpning ζ har en stor resonanstopp vid egenfrekvensen ω_0 i amplitudkurvan

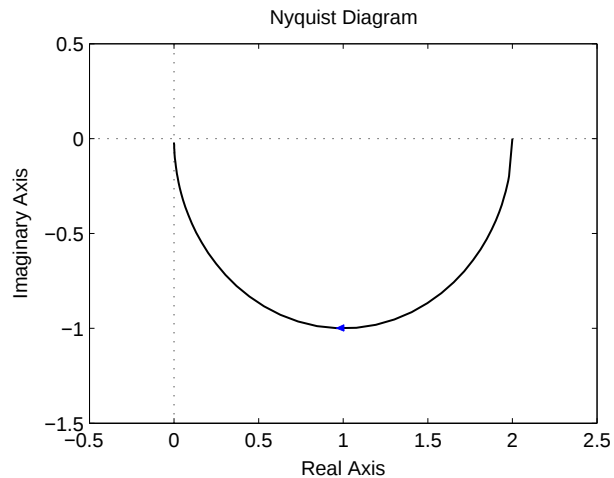
Nyquistdiagram

Rita kurvan $G(i\omega)$ i komplexa talplanet då ω går från 0 till ∞ .

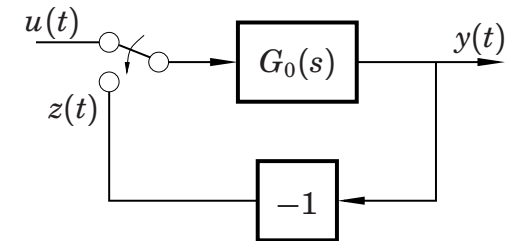


(MATLAB-kommando: `nyquist` (ritar även spegelvända kurvan))

Exempel: $G(s) = \frac{2}{s+1}$



Stabilitet för återkopplade system



Antag att öppna systemet $G_0(s)$ är stabilt

$$u(t) = \sin \omega t \Rightarrow y(t) = |G_0(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G_0(i\omega))$$

$$z(t) = |G_0(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G_0(i\omega) + \pi)$$

Om $z(t) = u(t)$ så uppstår en stabil självsvängning i kretsen när brytaren slås om. Detta händer om

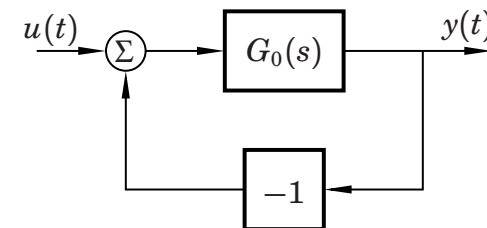
$$|G_0(i\omega)| = 1$$

$$\arg G_0(i\omega) = -\pi$$

$\Leftrightarrow$

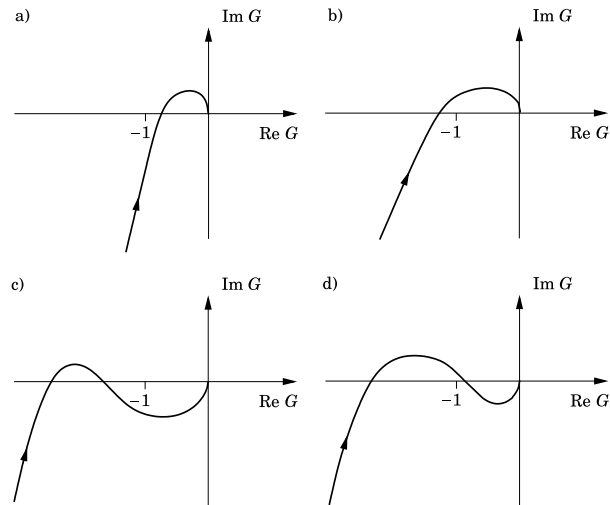
Nyquistkurvan för $G_0(s)$ går genom punkten -1

Nyquists (förenklade) stabilitetssats



Antag att öppna systemet $G_0(s)$ saknar poler i höger halvplan. Det slutna systemet är asymptotiskt stabilt om man går utefter kurvan $G_0(i\omega)$ från $\omega = 0$ till $\omega = \infty$ och finner att punkten -1 hamnar till vänster om kurvan.

Exempel



a) stabilt, b) instabilt, c) stabilt, d) instabilt

Harry Nyquist (1889–1976)

- Född i Nilsby, Värmland
- Karriär i USA
 - Univ. of North Dakota
 - Yale University
 - AT&T Bell Laboratories
- Tre viktiga resultat:
 - Nyquists stabilitetssats
 - Johnson–Nyquist-bruset
 - Nyquists samplingssats

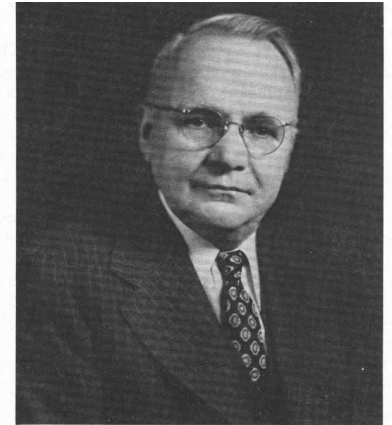


Fig. 10-1. H. Nyquist, who originated many fundamental concepts of communications, including the criterion for stability of negative feedback amplifiers and sampling theory as applied to digital systems.

Stabilitetsmarginaler

Amplitudmarginalen anger hur mycket förstärkningen kan öka utan att slutna systemet blir instabilt:

- Låt ω_0 vara den minsta frekvens där $\arg G_0(i\omega_0) = -180^\circ$
- Amplitudmarginalen ges då av $A_m = 1/|G_0(i\omega_0)|$

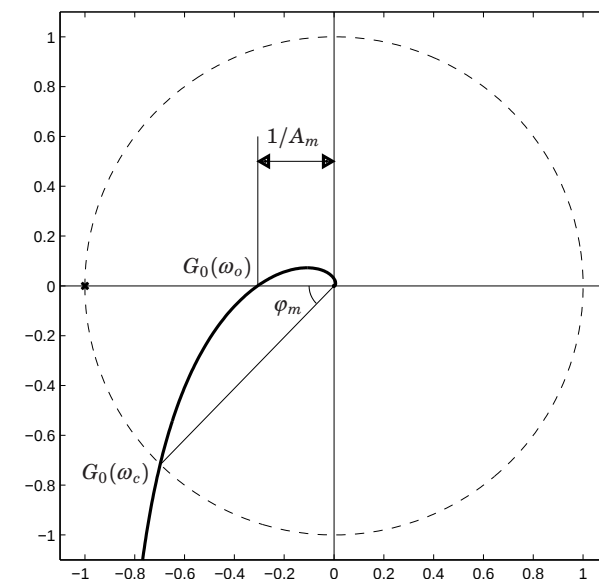
(Typiska marginaler: $A_m = 2-6$)

Fasmarginalen anger hur mycket fasen kan minska utan att slutna systemet blir instabilt:

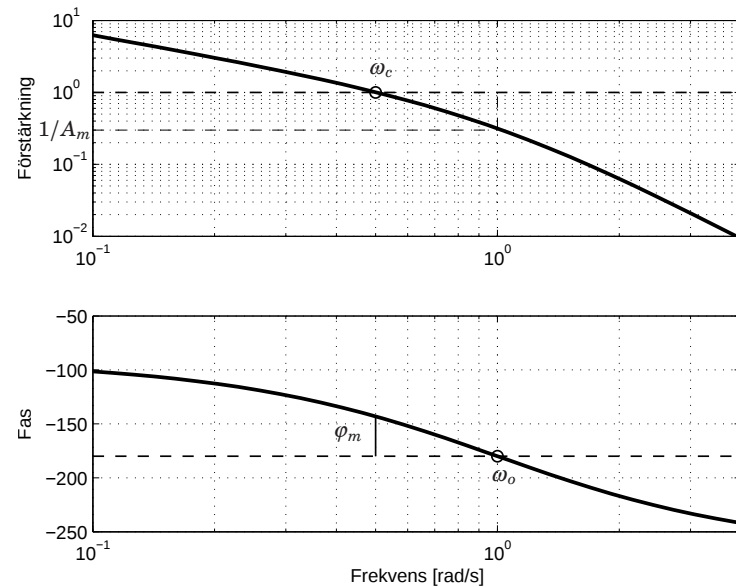
- Låt **skärfrekvensen** (cross-over frequency) ω_c vara den minsta frekvens där $|G_0(i\omega_c)| = 1$
- Fasmarginalen ges då av $\varphi_m = 180^\circ + \arg G_0(i\omega_c)$

(Typiska marginaler: $\varphi_m = 30^\circ-60^\circ$)

Amplitud- och fasmarginal i Nyquistdiagrammet

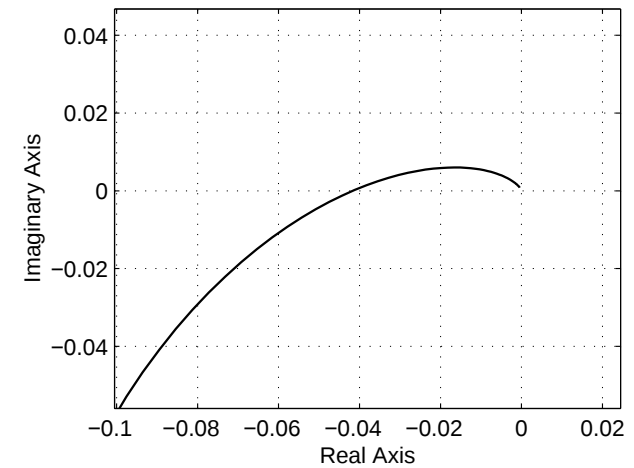


Amplitud- och fasmarginal i Bodediagrammet



Exempel

$$G_0(s) = \frac{1}{(s + 3.732)(s + 1)(s + 0.2679)}$$



Avläsning av amplitudmarginal:

$$\frac{1}{A_m} = 0.042 \quad \Leftrightarrow \quad A_m = 24$$

Tolkning: Om man reglerar systemet med en P-regulator kan förstärkningen vara max 24 utan att slutna systemet blir instabilt.

Nästa föreläsning

PID-reglering

- Frekvenstolkning
- Inställningsmetoder
- Praktiska modifieringar

Rekommenderad läsning: *Process Control*: 5.1–5.7