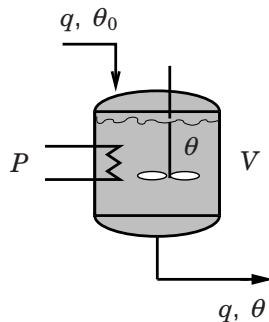


Föreläsning 7

- Återkopplade system
 - Exempel
 - Analys av stationära fel
 - Känslighet

Rekommenderad läsning: *Process Control*: 4.1–4.4, första delen av 4.5 (Routh–Hurwitz)

Exempel



Energibalans:

$$c\rho V \frac{d\theta}{dt} = P + c\rho q\theta_0 - c\rho q\theta$$

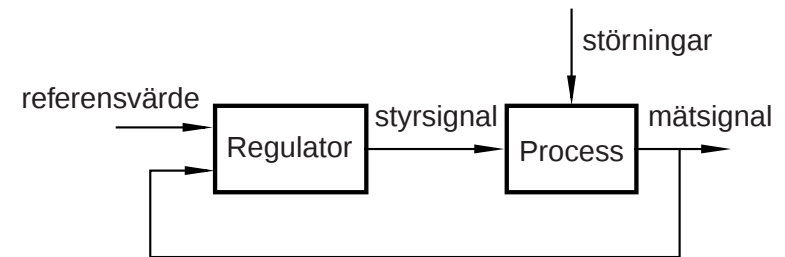
Låt $T = \frac{V}{q}$, $k = \frac{1}{c\rho q} \Rightarrow$

$$T \frac{d\theta}{dt} + \theta = kP + \theta_0$$

Linjär modell; θ , P , θ_0 betecknar avvikelser från ett jämviktsläge

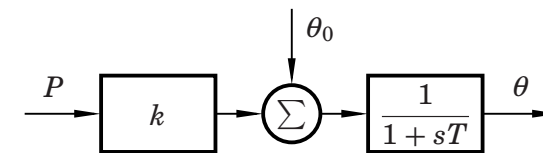
Mål: Håll $\theta = \theta_{\text{ref}}$ med hjälp av P trots variationer i θ_0

Sluten styrning



- Återkoppling från mätsignalen
- Regulatorn bestämmer styrsignalen så att
 - mätsignalen följer referensvärdet (servoproblemet)
 - störningarna undertrycks (regulatorproblemet)

Öppet system



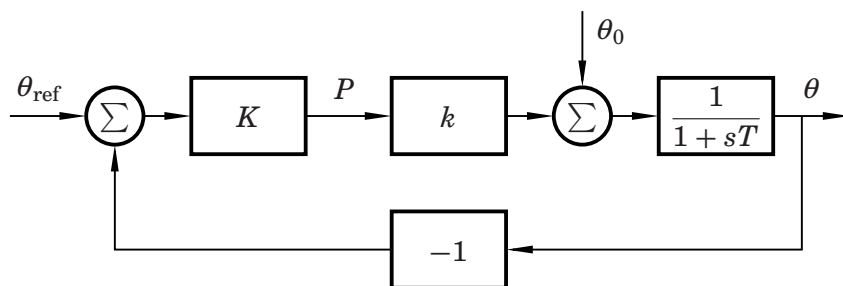
Effekt av stegändring i θ_0 :

$$\theta(s) = \frac{1}{1+sT} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\theta(t) = 1 - e^{-t/T}$$

Stationärt: $\theta = 1$

P-reglering

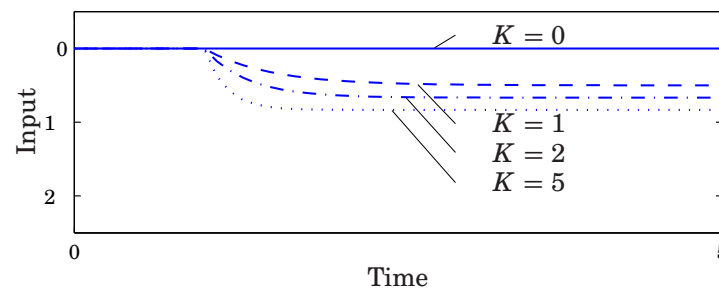
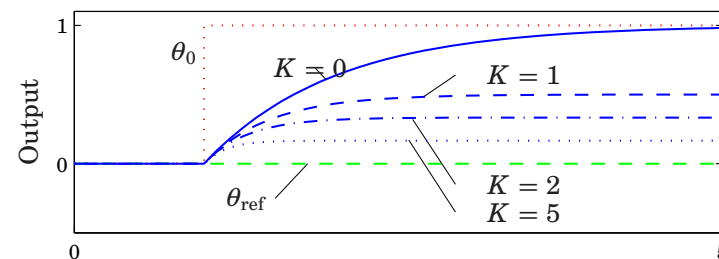


$$\theta(s) = \frac{1}{1+sT} \left(\theta_0(s) + kK(\theta_{ref}(s) - \theta(s)) \right)$$

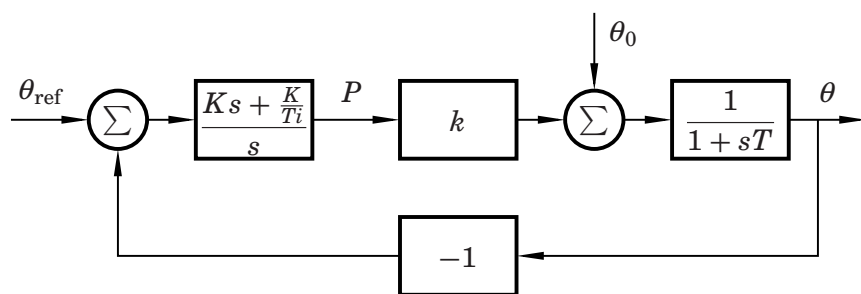
$$\theta(s) = \frac{kK}{1+sT+kK} \theta_{ref}(s) + \frac{1}{1+sT+kK} \theta_0(s)$$

$$\text{Stationärt: } \theta = \frac{kK}{1+kK} \theta_{ref} + \frac{1}{1+kK} \theta_0$$

Simulering av laststörning ($T=k=1$)



PI-reglering

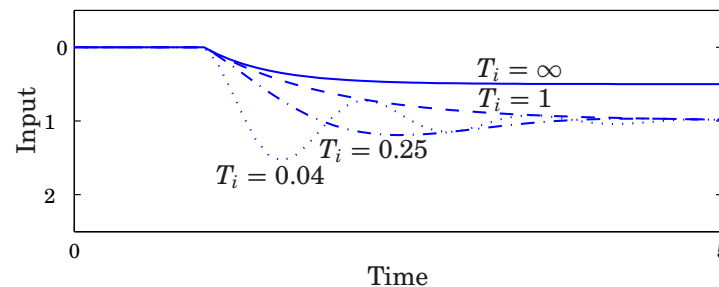
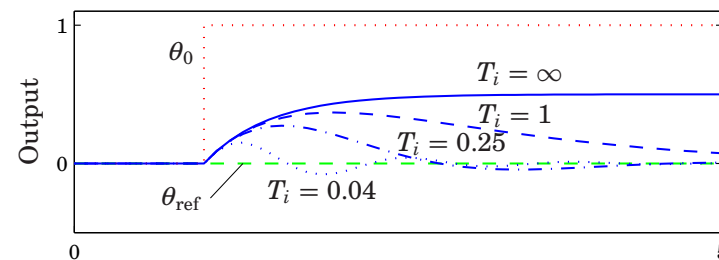


$$\theta(s) = \frac{1}{1+sT} \left(\theta_0(s) + \frac{kKs + \frac{kK}{T_i}}{s} (\theta_{ref}(s) - \theta(s)) \right)$$

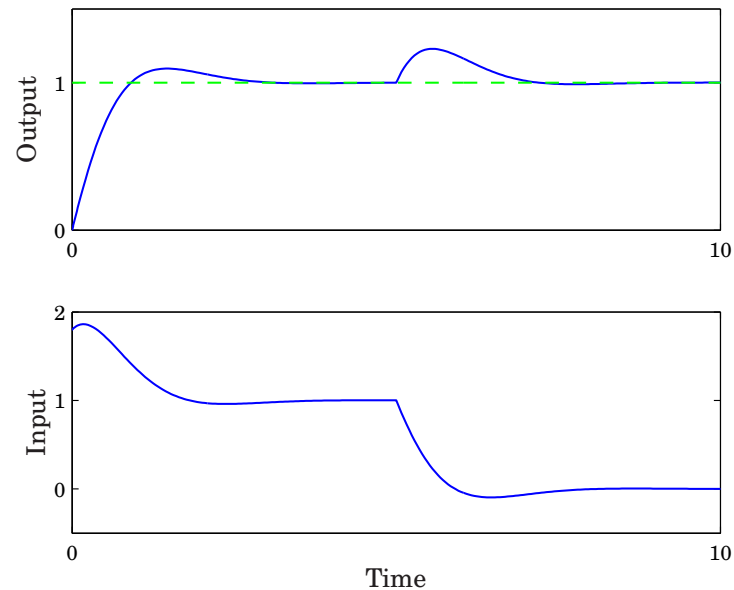
$$\theta(s) = \frac{kKs + \frac{kK}{T_i}}{Ts^2 + (kK + 1)s + \frac{kK}{T_i}} \theta_{ref}(s) + \frac{s}{Ts^2 + (kK + 1)s + \frac{kK}{T_i}} \theta_0(s)$$

$$\text{Stationärt: } \theta = \theta_{ref}$$

Simulering av laststörning ($T=k=K=1$)



Simulering av referensändring, laststörning ($T=k=1$, $K=1.8$, $T_i=0.45$)



Känslighet mot processvariationer

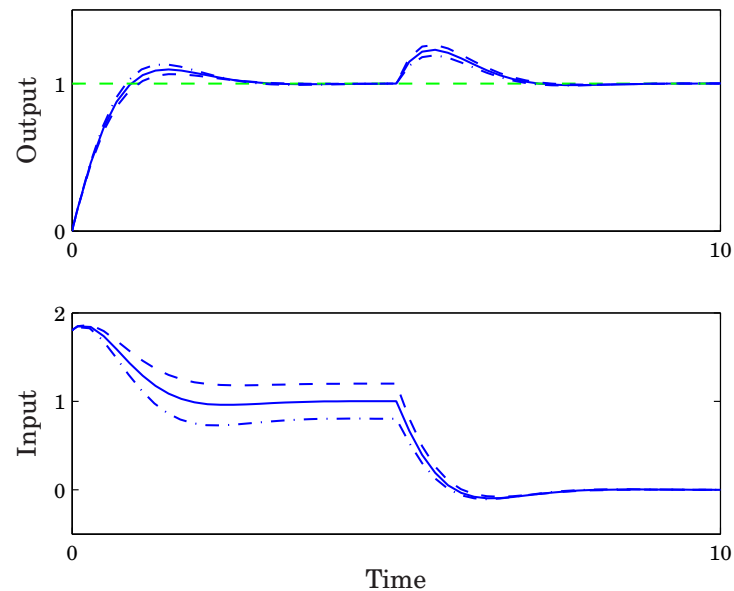
Med P-reglering är det slutna systemets statiska förstärkning

$$K_{cl} = \frac{kK}{1 + kK}$$

$K = 5$: $\pm 10\%$ ändring av k ger $K_{cl} = [0.82, 0.85]$

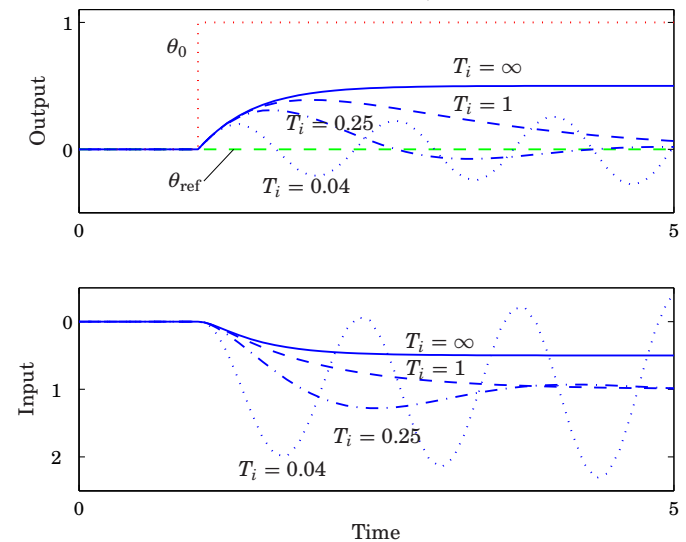
$K = 10$: $\pm 10\%$ ändring av k ger $K_{cl} = [0.90, 0.92]$

Simulering av referensändring, laststörning ($K=1.8$, $T_i=0.45$, $\pm 20\%$ ändring av q)

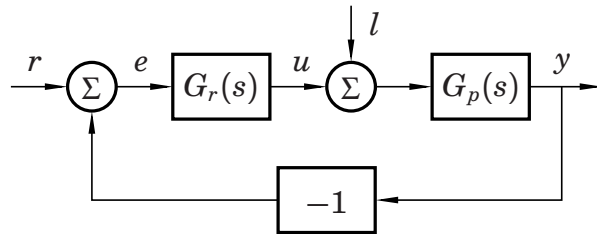


Känslighet mot omodellerad dynamik

Antag mätton med dynamik, $\theta_m(s) = \frac{1}{1+sT_m}\theta(s)$ ($T_m=0.1$, $T=k=K=1$)



Analys av stationära fel



Reglerfelet ges av

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_p(s)G_r(s)}R(s) - \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)G_r(s)}L(s)$$

Det stationära felet kan beräknas med slutvärdesteoremet:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (\text{om gränsvärdet existerar})$$

Stationära fel – servoproblemet

Låt

$$G_0(s) = G_r(s)G_p(s) = \frac{K(1 + q_1s + \dots + q_{m-1}s^{m-1})}{s^n(1 + p_1s + \dots + p_ms^m)} = \frac{KQ(s)}{s^nP(s)}$$

(d.v.s. **kretsöverföringsfunktionen** G_0 innehåller n integratorer)

Då:

$$E(s) = \frac{s^n P(s)}{s^n P(s) + KQ(s)} R(s)$$

Antag $r(t)$ steg, $R(s) = a/s$:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^n P(s)a}{s^n P(s) + KQ(s)} = \begin{cases} \frac{a}{1 + K} & n = 0 \\ 0 & n \geq 1 \end{cases}$$

Kontroll av stabilitet

Gränsvärdet existerar endast om $sE(s)$ är asymptotiskt stabilt (eller helt saknar poler)

Routh-Hurwitz stabilitetstest för lägre ordningens nämnarpolynom:

- 2:a ordningens nämnarpolynom:

$$s^2 + a_1s + a_2$$

Alla poler i vänster halvplan $\Leftrightarrow a_1 > 0$ och $a_2 > 0$

- 3:e ordningens nämnarpolynom:

$$s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3$$

Alla poler i vänster halvplan $\Leftrightarrow a_1 > 0$ och $a_2 > 0$ och $a_3 > 0$ och $a_1a_2 > a_3$

Antag $r(t)$ ramp, $R(s) = b/s^2$:

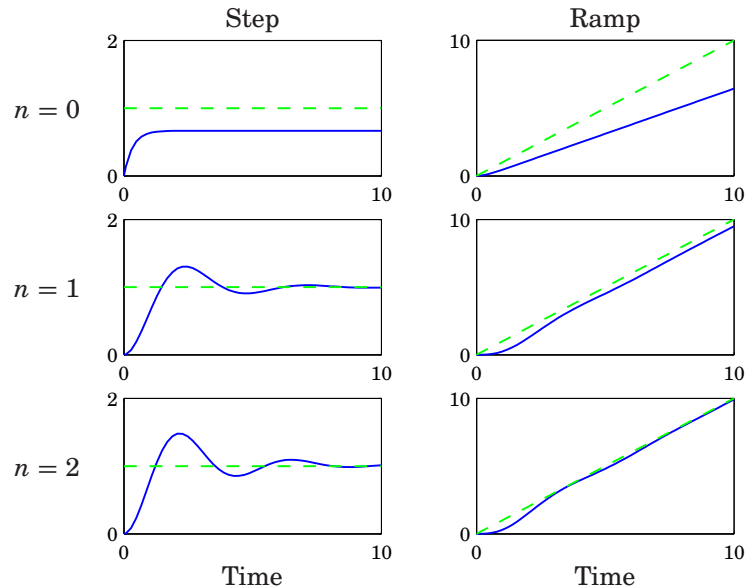
$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^n P(s)}{s^n P(s) + KQ(s)} \cdot \frac{b}{s} = \begin{cases} \infty, & n = 0 \\ \frac{b}{K} & n = 1 \\ 0 & n \geq 2 \end{cases}$$

Slutsatser:

- Felfri följning av stegreferens kräver 1 integrator i kretsöverföringsfunktionen
- Felfri följning av rampreferens kräver 2 integratorer i kretsöverföringsfunktionen

O.S.v.

Exempel



Stationära fel – regulatorproblemet

Liknande analys som för servoproblemet. Slutsatser:

- Eliminering av stegstörning kräver 1 integrator i **regulatorn**
- Eliminering av rampstörning kräver 2 integratorer i **regulatorn**

O.S.V.

Känslighet – exempel

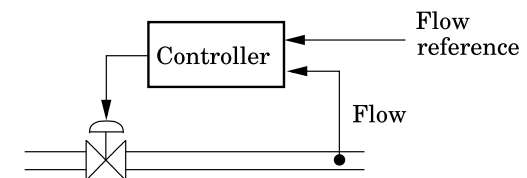
Olinjär ventil:

$$y = g(u) = u^2, \quad 0 \leq u \leq 1$$

Ventilens förstärkning beror på arbetspunkt u_0 :

$$\Delta y \approx g'(u_0)\Delta u = 2u_0\Delta u$$

Inför reglering:



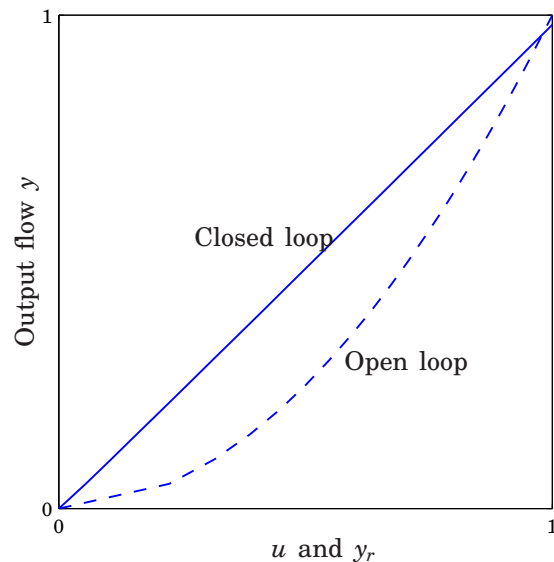
P-regulator: $u = K(y_{\text{ref}} - y) \Rightarrow$

$$\sqrt{y} = K(y_{\text{ref}} - y)$$

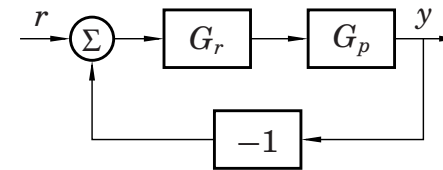
$$y_{\text{ref}} = y + \frac{\sqrt{y}}{K} = f(y)$$

$$\Delta y_{\text{ref}} \approx f'(y_0)\Delta y$$

$$\Delta y \approx \frac{1}{f'(y_0)}\Delta y_{\text{ref}} = \frac{2K\sqrt{y_0}}{1 + 2K\sqrt{y_0}}\Delta y_{\text{ref}} = \frac{2Ku_0}{1 + 2Ku_0}\Delta y_{\text{ref}}$$



Känslighetsfunktionen



Slutna systemets överföringsfunktion:

$$G_{cl} = \frac{G_p G_r}{1 + G_p G_r}$$

Man kan visa att

$$\frac{dG_{cl}}{dG_p} \cdot \frac{G_p}{G_{cl}} = \frac{1}{1 + G_p G_r} = S$$

Känslighetsfunktionen S beskriver hur en ändring i processen påverkar det slutna systemet, relativt sett

Återkopplade system – sammanfattning

Potentiella fördelar:

- Förändrad dynamik (snabbare, mera väldämpat, o.s.v.)
 - Slutna systemets poler kan bestämmas genom lämpligt val av regulatorparametrarna (s.k. polplacering)
- Undertryckning av störningar
 - Stationära fel kan analyseras med slutvärdesteoremet
- Minskad känslighet mot processvariationer och olinjäriteter

Potentiell nackdel:

- Kan leda till instabilitet (nästa föreläsning)

Nästa föreläsning

Frekvensanalys

- Frekvenssvar
- Bode- och Nyquistdiagram
- Stabilitet och stabilitetsmarginaler

Rekommenderad läsning: *Process Control*: 3.8, 4.5