

Föreläsning 6

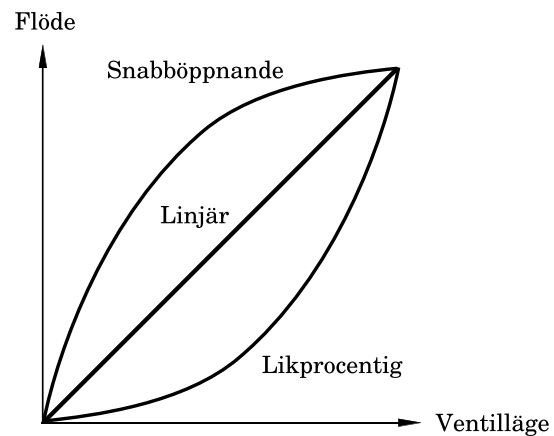
- Olinjära processer
- Linjärisering

Rekommenderad läsning: *Feedback Systems*: 3.7, 4.2; *Process Control*: 2.7

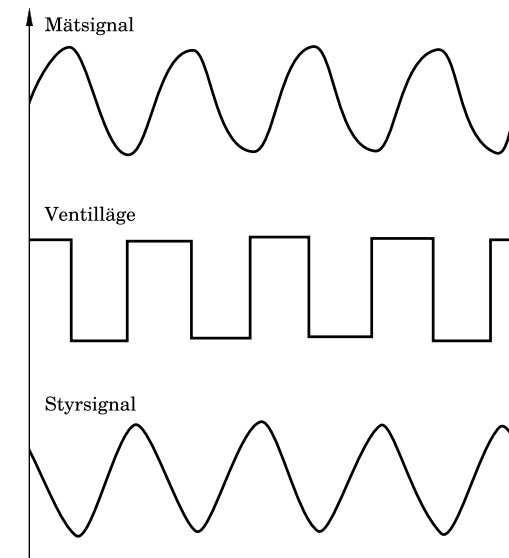
Olinjäriteter

- Begränsningar i ställdon och mätdon - finns alltid!
- Övriga olinjäriteter i ställdon och mätdon, t.ex.
 - ventiler med olinjär karaktäristik
 - friktion och glapp
 - olinjära givare för temperatur, flöde, koncentration
- Olinjär dynamik i processen, t.ex.
 - höjdberoende utflödeshastighet
 - temperaturberoende reaktionshastighet
 - vinkelberoende acceleration
 - populationsberoende tillväxthastighet

Exempel: Ventilkaraktäristiker



Exempel: Stick-slip motion orsakad av friktion



Exempel: Tank med fritt utflöde

$$A \frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2gh}$$

Exempel: Exotermisk CSTR

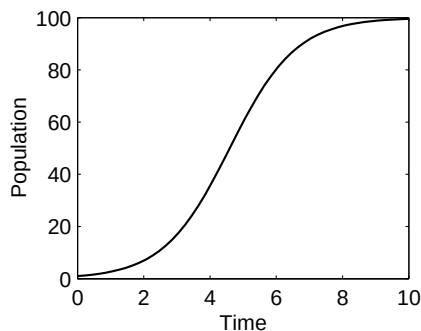
(Process Control: Subexample 2.18)

$$\begin{aligned}\tau \frac{dx_A}{dt} &= u_{v,in}(x_{A,in} - x_A) - D_m \exp\left(\gamma\left(1 - \frac{1}{x_T}\right)\right) \\ \tau \frac{dx_T}{dt} &= u_{v,i}(x_{T,in} - x_T) + \beta D_m \exp\left(\gamma\left(1 - \frac{1}{x_T}\right)\right) x_A + \frac{\tau}{\tau_c}(x_{T,c} - x_T)\end{aligned}$$

Exempel: Logistisk tillväxtmodell

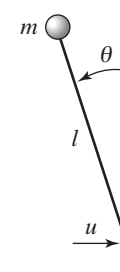
$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{x_c}\right)$$

x = population, r = net growth rate, x_c = carrying capacity



Exempel: Inverterad pendel

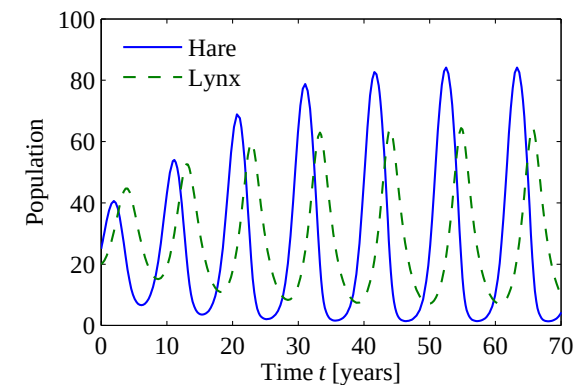
(Feedback Systems: Example 2.2)



$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \frac{mgl}{J_t} \sin \theta - \frac{\gamma}{J_t} \dot{\theta} + \frac{l}{J_t} \cos \theta u \end{pmatrix}$$

Exempel: Harar och lodjur

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= rH \left(1 - \frac{H}{k}\right) - \frac{aHL}{c + H}, \quad H \geq 0, \\ \frac{dL}{dt} &= b \frac{aHL}{c + H} - dL, \quad L \geq 0\end{aligned}$$



Linjära kontra olinjära processer

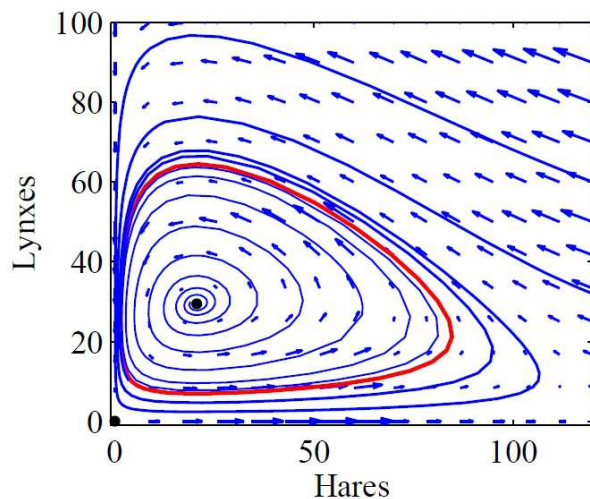
Linjära processer

- kan ekvivalent beskrivas med linjär tillståndsform, överföringsfunktion, impulssvar eller stegsvar
- har alltid jämviktspunkten $x = 0$
- global analys
- enkelt att utforma regulator

Olinjära processer

- kan beskrivas med olinjär tillståndsform
- kan ha många jämviktspunkter och uppvisa gränssvängningar
- simulering, fasporträtt, lokal analys via linjärisering
- svårt att utforma regulator

Exempel: harar och lodjur



Fasporträtt (*phase portrait*)

Andra ordningens olinjära tillståndsmodeller

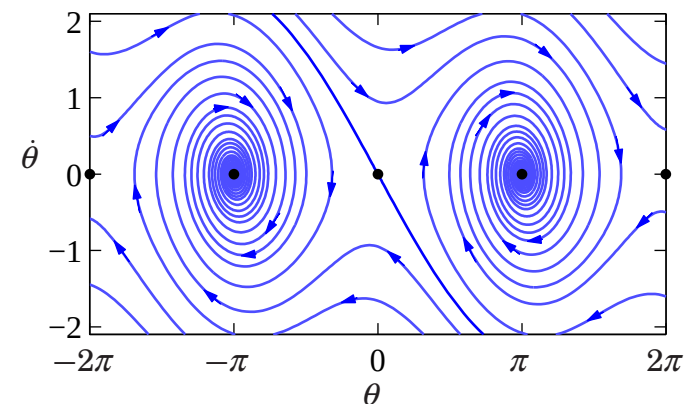
$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

kan visualiseras i ett fasporträtt där hastighetsvektorn $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$ ritas som en pil för för olika värden på tillståndet $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Kan även ritas som ett antal heldragna trajektorier

Exempel: inverterad pendel ($u = 0$)



Jämviktspunkter

Process:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u)$$

$$y = g(x, u)$$

Processens jämviktspunkter (*equilibria*) eller stationära punkter (*stationary points*) är alla punkter (x^0, u^0) där

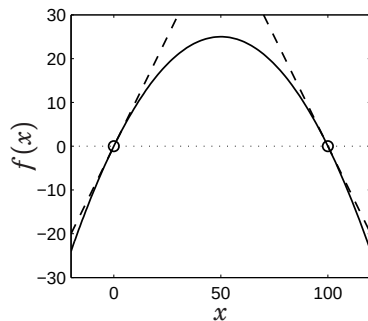
$$f(x^0, u^0) = 0$$

d.v.s. alla tidsderivator är noll.

Exempel: Logistiska tillväxtmodellen

$$rx^0 \left(1 - \frac{x^0}{x_c}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^0 = 0 \\ x^0 = x_c \end{cases}$$

Exempel: Logistiska tillväxtsmodellen med $x_c = 100$, $r = 1$



$$x^0 = 0: \quad \frac{d\Delta x}{dt} \approx \Delta x$$

$$x^0 = 100: \quad \frac{d\Delta x}{dt} \approx -\Delta x$$

Linjärisering – en variabel

- Hitta en stationär punkt x^0 till det olinjära systemet $\dot{x} = f(x)$
- Approximera $f(x)$ med en rät linje genom x^0 :

$$f(x) \approx \underbrace{f(x^0)}_{=0} + \underbrace{\frac{df}{dx}\bigg|_{x^0}}_a (x - x^0)$$

- Byt tillståndsvariabel och betrakta istället avvikelser Δx från jämviktspunkten:

$$\Delta x = x - x^0$$

- Systemet kan då skrivas

$$\frac{d\Delta x}{dt} \approx a\Delta x$$

Linjärisering – allmänna fallet

- Hitta en stationär punkt (x^0, u^0) till systemet

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u)$$

$$y = g(x, u)$$

- Gör 1:a ordningens Taylorapproximationer av f och g kring (x^0, u^0) :

$$f(x, u) \approx \underbrace{f(x^0, u^0)}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x^0, u^0)} (x - x^0) + \frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{(x^0, u^0)} (u - u^0)$$

$$g(x, u) \approx \underbrace{g(x^0, u^0)}_{=y^0} + \frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{(x^0, u^0)} (x - x^0) + \frac{\partial g}{\partial u}\bigg|_{(x^0, u^0)} (u - u^0)$$

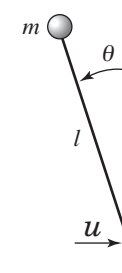
3. Inför nya variabler $\Delta x = x - x^0$, $\Delta u = u - u^0$ och $\Delta y = y - y^0$

4. Systemet kan nu skrivas som

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(x, u) \approx \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^0, u^0)}}_A \Delta x + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(x^0, u^0)}}_B \Delta u$$

$$\Delta y = g(x, u) - y^0 \approx \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x^0, u^0)}}_C \Delta x + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{(x^0, u^0)}}_D \Delta u$$

Exempel: Inverterad pendel



Normaliserad olinjär tillståndsmodell ($x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & &= f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 &= \sin x_1 - \gamma x_2 + u \cos x_1 & &= f_2(x_1, x_2, u) \\ y &= x_1 & &= g(x_1, x_2, u) \end{aligned}$$

1. Antag $u^0 = 0$. Jämviktspunkterna ges då av

$$\begin{aligned} x_2^0 &= 0 \\ \sin x_1^0 &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_2^0 &= 0 \\ x_1^0 &= 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots \end{aligned}$$

Välj den stationära punkten $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (0, 0, 0)$ med $y^0 = 0$

2. Beräkna partiella derivator:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos x_1 - u \sin x_1 & -\gamma \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos x_1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = 0$$

Utvärdera i den stationära punkten:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^0, u^0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix}$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x^0, u^0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x^0, u^0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{(x^0, u^0)} = 0$$

3. Inför nya variabler $\Delta x = x - x^0$, $\Delta u = u - u^0$ och $\Delta y = y - y^0$

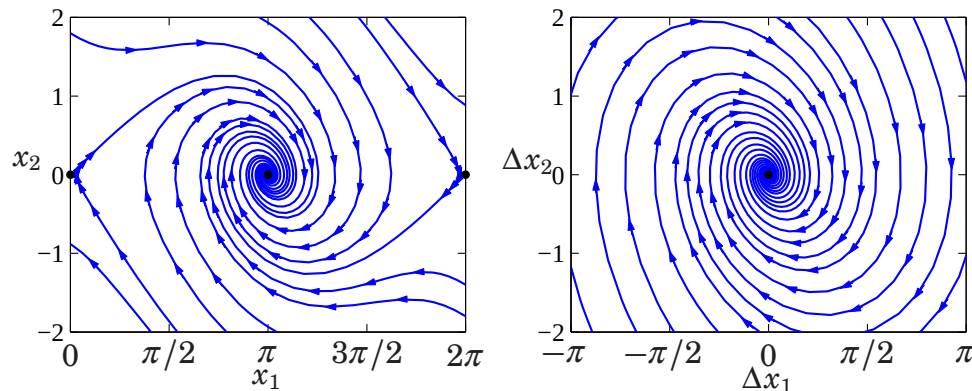
4. Systemet kan nu skrivas som

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix} \Delta x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \Delta x$$

Jämförelse mellan olinjärt och linjäriserat system

Inverterade pendeln kring stabila jämviktsläget $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (\pi, 0, 0)$



God approximation för små avvikelser från jämviktsläget

Nästa föreläsning (Systemteknik)

Återkopplade system

Rekommenderad läsning: *Process Control*: 4.1–4.4

Nästa föreläsning (Processreglering)

Dator- och sekvensstyrning

Rekommenderad läsning: *Process Control*: 7.1–7.5, 8.1–8.5