

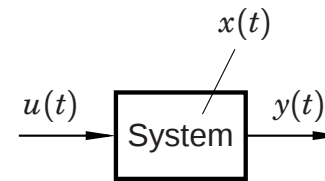
Föreläsning 5

- Poler och nollställen
- Blockschemaräkning
- Impulssvar
- Stegsvär

Rekommenderad läsning: *Process Control*: 3.6–3.7, 3.9

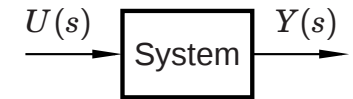
Linjära dynamiska system – repetition

Tillståndsform:



$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

Överföringsfunktion:



$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Tillståndsform → överföringsfunktion: $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

Överföringsfunktion → tillståndsform: Se formelsamlingen s. 4

Poler och nollställen

Överföringsfunktionen $G(s)$ kan ofta skrivas som ett rationellt uttryck:

$$G(s) = \frac{q(s)}{p(s)}, \quad \deg q \leq \deg p$$

Nollställen (zeros): rötter till $q(s) = 0$

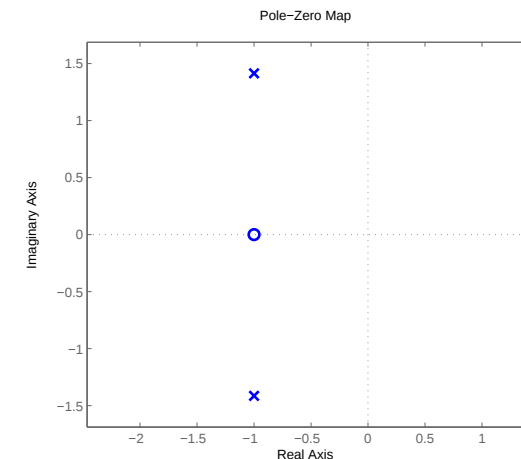
Poler (poles): rötter till $p(s) = 0$ (karakteristiska ekvationen). Notera att $p(s) = \det(sI - A)$, d.v.s. poler till $G(s) \Leftrightarrow$ egenvärden till A

Kan ritas i ett singularitetsdiagram/pol-nollställe-diagram (*singularity diagram/pole-zero map*)

- Poler: x
- Nollställen: o

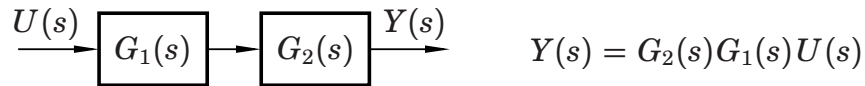
Exempel:

$$G(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 2s + 3}$$

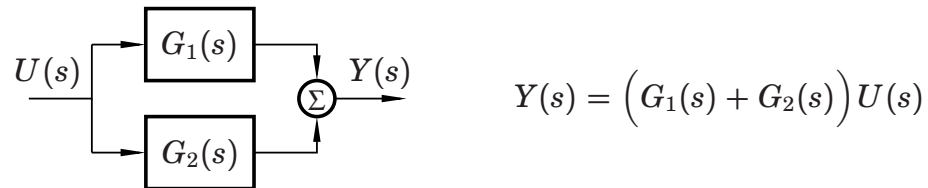


Blockschemaräkning med överföringsfunktioner

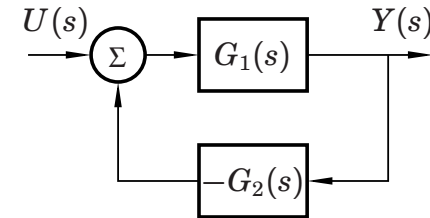
Seriekoppling:



Parallellkoppling:



Återkoppling:

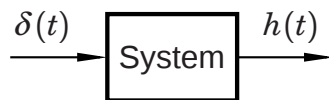


$$Y(s) = G_1(s)(U(s) - G_2(s)Y(s))$$

$$Y(s)(1 + G_1(s)G_2(s)) = G_1(s)U(s)$$

$$Y(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}U(s)$$

Impulssvar (impulse response)



1. Laplace-transformera insignalen: $U(s) = 1$

2. Utsignalen blir

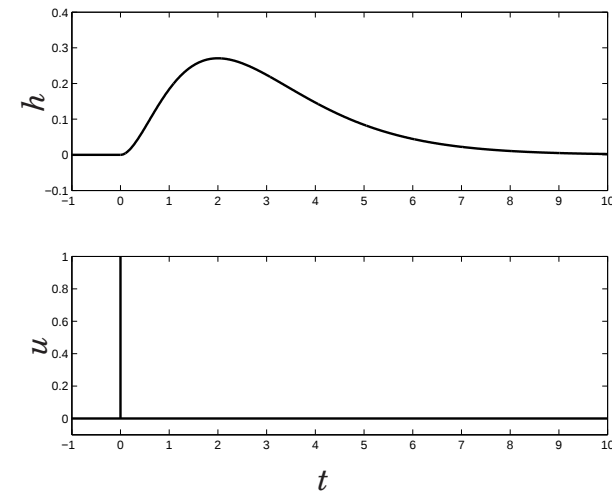
$$H(s) = G(s)U(s) = G(s)$$

3. Inverstransformering ger impulssvaret

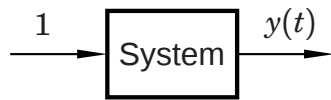
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

$h(t)$ kallas även viktfunktion (weighting function)

Exempel på impulssvar



Stegsvar (step response)



1. Laplace-transformera insignalen: $U(s) = \frac{1}{s}$

2. Utsignalen blir

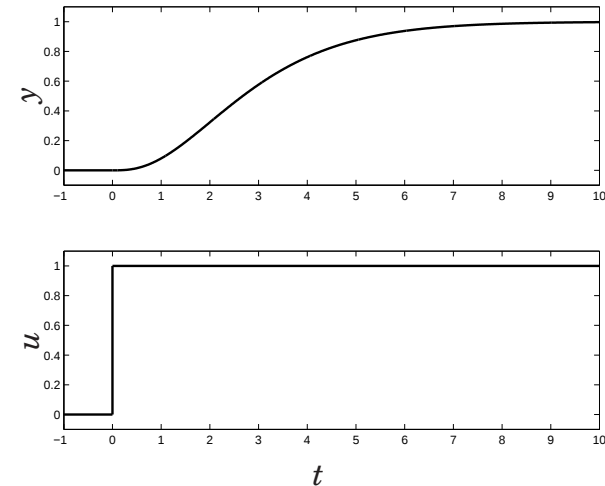
$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\frac{1}{s}$$

3. Inverstransformering ger stegsvaret

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ G(s)\frac{1}{s} \right\}$$

(Notera att $y(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau$)

Exempel på stegsvar



Statisk förstärkning

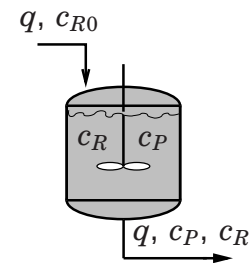
Stegsvarets slutvärde kallas **statisk förstärkning** (*steady state gain/static gain*).

Stegsvarets slutvärde kan beräknas med slutvärdesteoremet (gränsvärdet existerar endast för asymptotiskt stabila system):

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)\frac{1}{s} = G(0)$$

Exempel: tankreaktorn



- Volym V , flöde q
- Reaktion $R \rightarrow P$
- Reaktionshast. k_1

Överföringsfunktion från c_{R0} till c_P :

$$G(s) = \frac{\frac{q}{V}k_1}{(s + \frac{q}{V} + k_1)(s + \frac{q}{V})}$$

Statisk förstärkning:

$$G(0) = \frac{\frac{q}{V}k_1}{(\frac{q}{V} + k_1)\frac{q}{V}} = \frac{1}{\frac{q}{k_1 V} + 1}$$

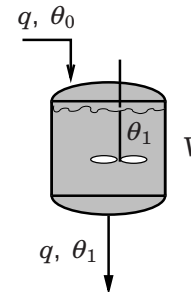
Stegsvar för några tpsystem

- Första ordningens system
- Andra ordningens system med reella poler
- Andra ordningens system med komplexa poler

1:a ordningens system

$$G(s) = \frac{1}{1 + sT}, \quad T > 0$$

Exempel: temperaturdynamik i en tank:



Överföringsfunktion från θ_0 till θ_1 :

$$G(s) = \frac{1}{1 + s\frac{V}{q}}$$

1:a ordningens system

Pol:

$$s = -1/T$$

Stegsvar:

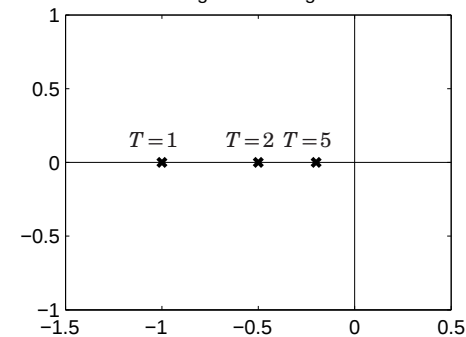
$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{1}{s(1 + sT)}$$

$$y(t) = 1 - e^{-t/T}$$

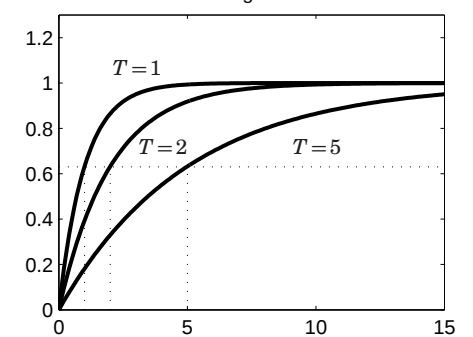
T kallas systemets **tidskonstant** (time constant)

$$y(T) = 1 - e^{-1} \approx 0.63$$

Singularitetsdiagram



Stegsvar

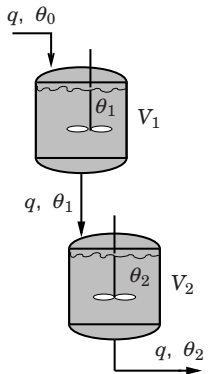


- Svarets snabbhet bestäms av polens avstånd från origo

2:a ordningens system med reella poler

$$G(s) = \frac{1}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}, \quad T_1, T_2 > 0$$

Exempel: temperaturdynamik i kopplade tankar:



Överföringsfunktion från θ_0 till θ_2 :

$$G(s) = \frac{1}{(1 + s\frac{V_1}{q})(1 + s\frac{V_2}{q})}$$

2:a ordningens system med reella poler

Poler:

$$s = -1/T_1, \quad s = -1/T_2$$

Stegsvar:

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{1}{s(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$

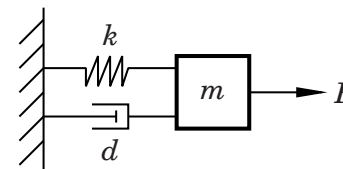
$$y(t) = \begin{cases} 1 - \frac{T_1 e^{-t/T_1} - T_2 e^{-t/T_2}}{T_1 - T_2}, & T_1 \neq T_2 \\ 1 - e^{-t/T} - \frac{t}{T} e^{-t/T}, & T_1 = T_2 = T \end{cases}$$

Två tidskonstanter: T_1, T_2

2:a ordningens system med komplexa poler

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}, \quad \omega_0 > 0, \quad 0 < \zeta < 1$$

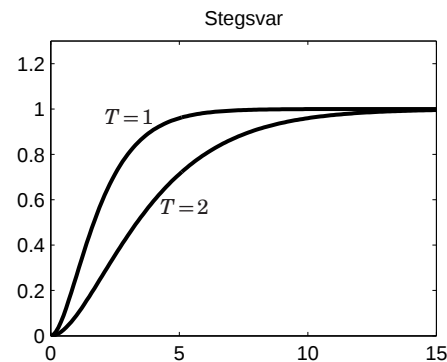
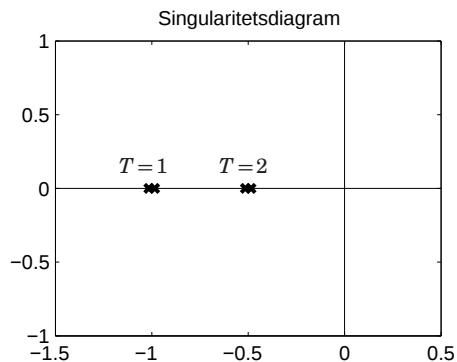
Exempel: positionsdynamik för mekaniskt system:



Överföringsfunktion från F till z :

$$G(s) = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{k}{m}}$$

Komplexa poler om $d^2 < 4km$

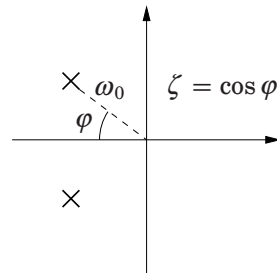


- Två poler ger mjukare och långsammare svar än en enkelpol (ekvivalent tidskonstant $T_{eq} = T_1 + T_2$)
- Om $T_1 \gg T_2$ så beter sig systemet i princip som ett 1:a ordningens system med tidskonstant T_1

2:a ordningens system med komplexa poler

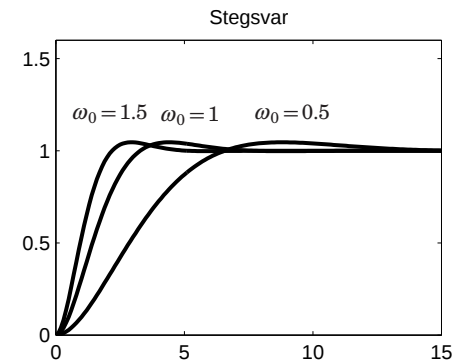
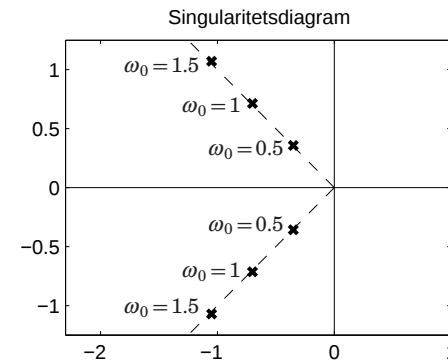
Poler:

$$s = -\zeta \omega_0 \pm i \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_0$$

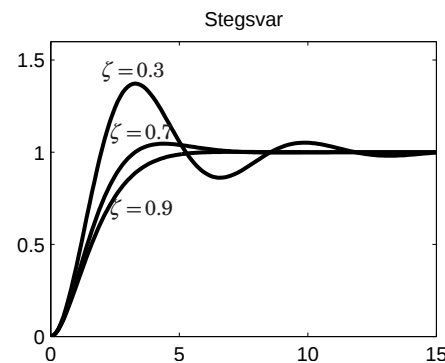
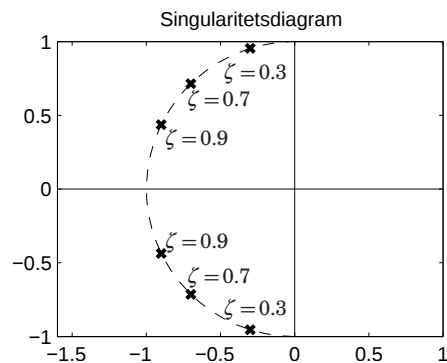


Stegsvar:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_0 t} \sin \left(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t + \arccos \zeta \right)$$



- Svarets snabbhet bestäms av polernas avstånd från origo



- Svarets dämpning bestäms av polernas vinkel

Tolkning av poler och nollställen

Poler

- Beror bara på A -matrisen, d.v.s. på systemets inre dynamik
- Bestämmer systemets
 - stabilitet
 - snabbhet
 - dämpning

Nollställen

- Mera svårtolkade
- Beror på hur in- och utsignalen är kopplade till systemet, d.v.s. även på B -, C - och D -matriserna
- Inverkar främst på systemsvarets initialbeteende

Inverkan av nollställe

Antag systemet

$$(1 + T_{z1}s)G_0(s)$$

Stegsvar:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ G_0(s) \frac{1}{s} \right\} + T_{z1} \mathcal{L}^{-1} \{ G_0(s) \}$$

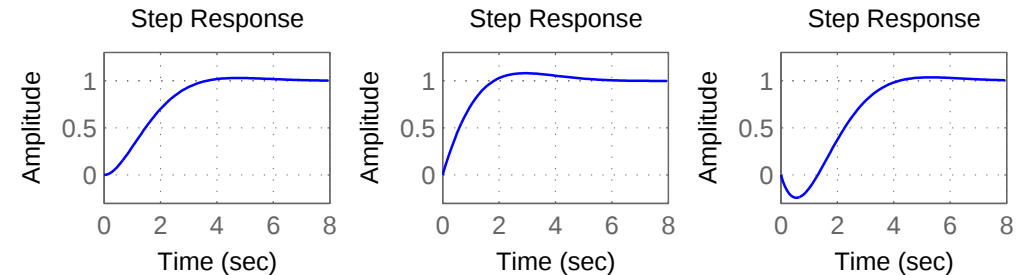
Viktad summa av stegsvaret och impulssvaret för $G_0(s)$

Exempel

$$G_0(s) = \frac{1}{s^2 + 1.5s + 1}$$

$$G_1(s) = \frac{1 + s}{s^2 + 1.5s + 1}$$

$$G_2(s) = \frac{1 - s}{s^2 + 1.5s + 1}$$



- Nollställe i vänster halvplan ger extra "skjuts" uppåt i början
- Nollställe i höger halvplan gör att stegsvaret börjar på "fel håll"

Begynnelsebeteende

Låt $r = \deg p - \deg q$ (antal poler minus antal nollställen) vara systemets relativa gradtal

Om $r = 0$ börjar stegsvaret på $y \neq 0$

Om $r = 1$ börjar stegsvaret som $y \approx kt$

Om $r = 2$ börjar stegsvaret som $y \approx kt^2$

osv

(kan visas med begynnelsevärdesteoremet)

System på överföringsfunktionsform i Matlab

```
% Definiera en överföringsfunktion
sys = tf([1 0.5],[1 1.5 1]) % (s+0.5)/(s^2+1.5s+1)

% Räkna ut poler och nollställen
pole(sys)
zero(sys)

% Rita singularitetsdiagram
pzmap(sys)

% Rita impulssvar och stegsvar
impz(sys)
step(sys)
```

Nästa föreläsning

- Olinjära system
- Linjärisering

Rekommenderad läsning: *Feedback Systems*: 3.7, 4.2; *Process Control*: 2.7