

Föreläsning 4

- Laplacetransformen
- Överföringsfunktion

Rekommenderad läsning: *Process Control*: 3.5–3.6

Laplacetransformen?

Ett kraftfullt matematiskt verktyg för att studera och lösa linjära differentialekvationer

T.ex.



Vad blir utsignalen $y(t)$ givet en viss insignal $u(t)$?

Lösning av differentialekvationer utan Laplacetransformen

Exempel: 2:a ordningens inhomogen linjär differentialekvation:

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = u(t)$$

1. Finn alla lösningar till homogena ekvationen $\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0$
 - Lös karakteristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0 \Rightarrow r_1, r_2$
 - Homogen lösning:

$$y_h = \begin{cases} C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, & r_1 \neq r_2 \\ (C_1 t + C_2) e^{r_1 t}, & r_1 = r_2 \end{cases}$$

2. Finn en partikulärlösning y_p till inhomogena ekvationen
 - Olika *lösningsansatser* beroende på $u(t)$

3. Alla lösningar ges av

$$y = y_h + y_p$$

4. Bestäm C_1 och C_2 med hjälp av eventuella begynnelsevillkor

Ganska omständligt. . .

Laplaceformen

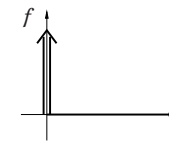
Omvandlar en funktion $f(t)$ till en annan funktion $F(s)$.

- $f(t)$ är en funktion av tiden $t \geq 0$
- $F(s)$ är en funktion av den "komplexa frekvensen" s

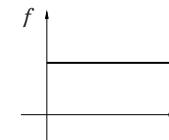
Definition:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

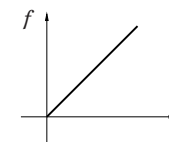
Några vanliga funktioner (signaler)



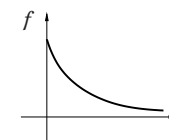
$$f(t) = \delta(t) \quad \text{Impuls}$$



$$f(t) = 1 \quad \text{Steg (konstant signal)}$$



$$f(t) = t \quad \text{Ramp}$$



$$f(t) = e^{-at} \quad \text{Exponentialfunktion}$$

Diracfunktionen $\delta(t)$

- Impuls vid tiden 0
- Oändligt hög och oändligt smal, men med arean 1:

$$p_{\epsilon}(t) = \begin{cases} 1/\epsilon & 0 \leq t < \epsilon \\ 0 & t \geq \epsilon \end{cases}$$

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p_{\epsilon}(t)$$

Exempel:

$$\frac{dV}{dt} = \delta(t)$$

Tolkning: "Injektion av en enhetsvolym vid tiden noll"

Laplaceformen av några vanliga funktioner

Impuls:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 1$$

Steg:

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Exponentialfunktion:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

Utdrag ur formelsamlingen s. 6:

	Laplace transform $F(s)$	Tidsfunktion $f(t)$	
1	1	$\delta(t)$	Diracfunktion
2	$\frac{1}{s}$	1	Stegfunktion
3	$\frac{1}{s^2}$	t	Rampfunktion
6	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	
24	$\frac{ab}{s(s+a)(s+b)}$	$1 + \frac{ae^{-bt} - be^{-at}}{b-a}$	

Några viktiga egenskaper hos Laplacetransformen

Utdrag ur formelsamlingen s. 5:

	Laplace transform $F(s)$	Tidsfunktion $f(t)$	
1	$\alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$	$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$	Linjäritet
8	$sF(s) - f(0)$	$f'(t)$	Derivering i t -planet
9	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$	$f''(t)$	
12	$\frac{1}{s} F(s)$	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	Integration i t -planet

Härledning av derivataformeln

Antag att $f(t)$ har Laplacetransformen $F(s)$. Då

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^t f'(t)e^{-st} dt \\
 &= [f(t)e^{-st}]_0^\infty + \int_0^\infty f(t)se^{-st} dt \\
 &= -f(0) + sF(s)
 \end{aligned}$$

Fler viktiga egenskaper

Utdrag ur formelsamlingen s. 5:

	Laplace transform $F(s)$	Tidsfunktion $f(t)$	
14	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	Slutvärdesteoremet
15	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	Begynnelsevärdesteoremet

OBS! Får bara användas om gränsvärdet i tidsdomänen existerar!

Arbetsgång för att lösa differentialekvationer med hjälp av Laplacetransformen

1. Laplace-transformera alla termer i ekvationen
 - Använd formelsamlingen
2. Lös ut $Y(s)$
3. Använd invers Laplace-transform för att hitta $y(t)$
 - Partialbråksuppdelning först om det behövs
 - Använd formelsamlingen

Exempel 1

Lös

$$\dot{y} + 3y = 0$$

med begynnelsevillkoret $y(0) = 5$.

1. Laplacetransformera:

$$sY(s) - 5 + 3Y(s) = 0$$

2. Lös ut $Y(s)$:

$$(s + 3)Y(s) = 5$$

$$Y(s) = \frac{5}{s + 3} = 5 \cdot \frac{1}{s + 3}$$

3. Invers Laplace (transform nr. 6):

$$y(t) = 5e^{-3t}$$

Exempel 2

Lös

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 1$$

med begynnelsevillkoret $y(0) = \dot{y}(0) = 0$.

1. Laplacetransformera:

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{1}{s}$$

2. Lös ut $Y(s)$:

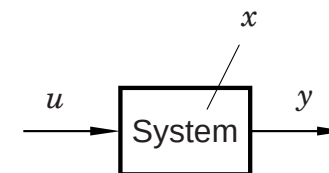
$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{1}{s(s + 1)(s + 2)}$$

3. Invers Laplace (transform nr. 24):

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{e^{-2t} - 2e^{-t}}{2}$$

Repetition: Tillståndsformen



$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Direkt lösning av tillståndsekvationen

Lösning (se formelsamlingen s. 3):

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$
$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}x(0)}_{\text{inverkan av initialtillstånd}} + \underbrace{\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}_{\text{inverkan av insignal}}$$

Lämpar sig inte för handräkning / kvalitativ förståelse

Lösning av tillståndsekvationen med Laplace-transformen

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Antag initialtillståndet $x(0) = 0$.

Laplacetransformera:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$
$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Lös ut $X(s)$:

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$
$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Sätt in i ekvationen för $Y(s)$:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$
$$= \underbrace{\left(C(sI - A)^{-1}B + D\right)}_{G(s)} U(s)$$

$G(s)$ kallas för systemets **överföringsfunktion** (transfer function)

Exempel: tankreaktorn

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{q}{V} + k_1\right) & 0 \\ k_1 & -\frac{q}{V} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{q}{V} \\ 0 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

Överföringsfunktion:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s + \frac{q}{V} + k_1 & 0 \\ -k_1 & s + \frac{q}{V} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{q}{V} \\ 0 \end{pmatrix} + 0$$
$$= \frac{\frac{q}{V}k_1}{(s + \frac{q}{V} + k_1)(s + \frac{q}{V})}$$

Omvandling från högre ordningens differentialekvation till överföringsfunktion

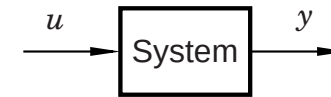
Exempel: Antag att en process beskrivs av

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = b_1\dot{u} + b_2u$$

Laplacetransformering ger

$$(s^2 + a_1s + a_2)Y(s) = (b_1s + b_2)U(s)$$
$$Y(s) = \underbrace{\frac{b_1s + b_2}{s^2 + a_1s + a_2}}_{G(s)} U(s)$$

Att räkna ut systemsvar med Laplace-transformen



1. Hitta insignalens Laplacetransform $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$
2. Hitta systemets överföringsfunktion $G(s)$
3. Beräkna utsignalen i Laplace-domänen:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

4. Använd invers Laplace-transform: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$

Överföringsfunktion $G(s)$ – sammanfattning

- Kompakt beskrivning av dynamiken från insignal till utsignal
- Bryr sig inte om tillståndsvariablerna inne i systemet
- Enkelt att beräkna systemsvar med formeln

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Nästa föreläsning

- Poler och nollställen
- Impulssvar
- Stegsvär

Rekommenderad läsning: *Process Control*: 3.6–3.7, 3.9