

Föreläsning 3

- Tillståndsformen (*state-space form*)
- Stabilitet

Rekommenderad läsning: *Process Control*: 2.6, 3.1–3.4, *Feedback Systems*: 3.6.

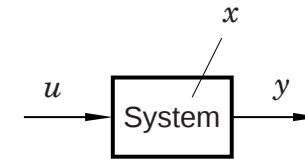
Vektorn x kallas systemets tillstånd (*state*) och innehåller värdet av alla ackumulerade storheter i systemet (systemets "minne")

Systemets dynamik beskrivs av n första ordningens differentialekvationer:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)\end{aligned}$$

(Skrivsättet $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ för tidsderivata förekommer också)

Tillståndsformen



Generellt är x , u och y vektorer:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

n = antal tillståndsvariabler = systemets ordningstal (*order*)

m = antal insignaler, p = antal utsignaler

Utsignalerna ges av p mätekvationer (anges inte alltid):

$$\begin{aligned}y_1 &= g_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ &\vdots \\ y_p &= g_p(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)\end{aligned}$$

Systemet kan skrivas på vektorform som

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u)\end{aligned}$$

Tillståndsformen för linjära system

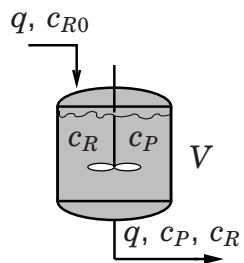
$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m \\ y_1 &= c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + \dots + d_{1m}u_m \\ &\vdots \\ y_p &= c_{p1}x_1 + \dots + c_{pn}x_n + d_{p1}u_1 + \dots + d_{pm}u_m\end{aligned}$$

På matrisform:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

(Vilka dimensioner har A , B , C och D ?)

Exempel: koncentrationsdynamik i tankreaktor



- Volym V , flöde q
- 1:a ordn. reaktion $R \rightarrow P$
- Reaktionshastighet
 $r_R = -r_P = -k_1 c_R$

Materialbalanser ger modellen

$$\begin{aligned}\frac{dc_R}{dt} &= -\left(\frac{q}{V} + k_1\right)c_R + \frac{q}{V}c_{R0} \\ \frac{dc_P}{dt} &= k_1 c_R - \frac{q}{V}c_P\end{aligned}$$

Inför tillståndsvektorn

$$x = \begin{pmatrix} c_R \\ c_P \end{pmatrix}$$

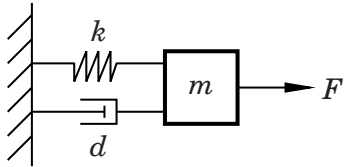
Antag att

- vi styr $u = c_{R0}$
- vi mäter $y = \begin{pmatrix} c_R \\ c_P \end{pmatrix}$

Dynamiken skriven på tillståndsform med matriser blir

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \underbrace{\begin{pmatrix} -\left(\frac{q}{V} + k_1\right) & 0 \\ k_1 & -\frac{q}{V} \end{pmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{q}{V} \\ 0 \end{pmatrix}}_B u \\ y &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_C x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_D u\end{aligned}$$

Exempel: positionsdynamik för mekaniskt system



- Massa m med position z och hastighet v
- Yttre kraft: F
- Fjäderkraft: $F_k = kz$
- Dämparkraft: $F_d = dv$

Kraftbalans ger modellen

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{d}{m}v - \frac{k}{m}z + \frac{1}{m}F$$

$$\frac{dz}{dt} = v$$

Inför tillståndsvektorn

$$x = \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}$$

Antag att

- vi styr $u = F$
- vi mäter $y = z$

Dynamiken skriven på tillståndsform med matriser blir

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{d}{m} & -\frac{k}{m} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{pmatrix}}_B u$$

$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}_C x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}}_D u$$

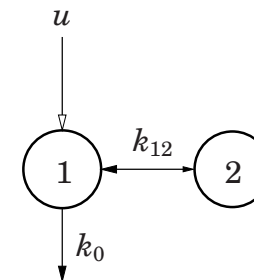
Compartment-modeller

- Erik Widmark modellerade spridningen av alkohol i kroppen, 1922
- Torsten Teorell myntade begreppet "compartment model", 1936
- Compartment-modeller krävs av FDA för att godkänna nya läkemedel
- Pulstestning t.ex. i biologiska och industriella system



- Systemet består av förbundna avdelningar (*compartments*)
- En tillståndsvariabel för varje avdelning representerar massan eller koncentrationen av det studerade ämnet
- Transporthastigheterna är proportionella mot koncentrationskillnaderna

Exempel med två avdelningar:



Inför tillståndsvariablerna

c_1 = koncentrationen i avdelning 1

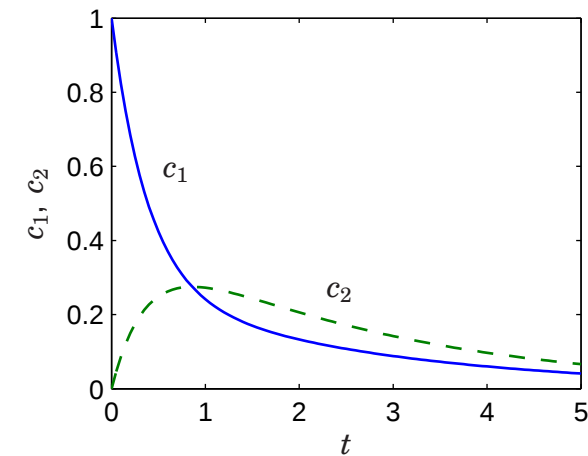
c_2 = koncentrationen i avdelning 2

Dynamiken ges då av

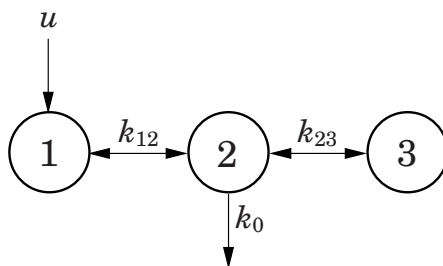
$$V_1 \frac{dc_1}{dt} = k_{12}(c_2 - c_1) - k_0 c_1 + u$$

$$V_2 \frac{dc_2}{dt} = k_{12}(c_1 - c_2)$$

Antag $V_1 = V_2 = k_{12} = k_0 = 1$. Svar vid injektion av enhetsvolym:



Inlämningsuppgift 1



Stabilitet

Stabilitet är en inneboende systemegenskap – beror ej på hur insignalerna ser ut

Om vi struntar i insignalerna kan vi studera systemet

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$
$$y = Cx$$

Stabilitetsbegrepp

Asymptotisk stabilitet: $y(t) \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$ för alla initialvärden

Stabilitet: $y(t)$ begränsad då $t \rightarrow \infty$ för alla initialvärden

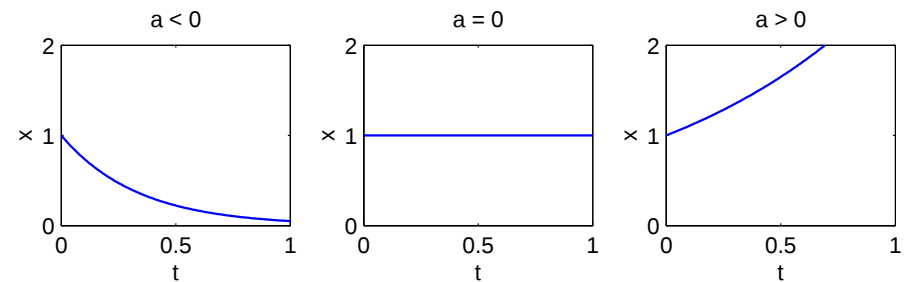
Instabilitet: $y(t)$ obegränsad då $t \rightarrow \infty$ för något initialvärde

Skalära fallet ($n = 1$)

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$$
$$y(t) = cx(t)$$

Lösning:

$$x(t) = e^{at}x(0)$$



Stabilitetsvillkor – skalära fallet

- $a < 0 \Leftrightarrow$ asymptotiskt stabilt
- $a \leq 0 \Leftrightarrow$ stabilt
- $a > 0 \Leftrightarrow$ instabilt

Allmänna fallet ($n \geq 1$)

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

Lösning:

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

Vad betyder det?

Exponentialmatris

$$e^{At} = I + At + (At)^2/2! + (At)^3/3! + \dots$$

Derivera lösningen ovan för att kolla att den stämmer:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} e^{At} x(0) = (A + A^2 t + A^3 t^2/2 + \dots) x(0) \\ &= A e^{At} x(0) = A x(t)\end{aligned}$$

Stabilitetsvillkor – allmänna fallet

Egenvärdena $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ till matrisen A avgör stabiliteten:

- alla $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \Leftrightarrow$ asymptotiskt stabilt
- alla $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ och ev. egenvärden på imaginära axeln enkla $\Leftrightarrow$ stabilt
- någon $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0 \Rightarrow$ instabilt

Egenvärdena fås genom att lösa den **karakteristiska ekvationen**

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Exempel: tankreaktorn

Eftersom A -matrisen är triangulär så ges egenvärdena direkt av diagonalelementen:

$$\lambda_1 = -\left(\frac{q}{V} + k_1\right), \quad \lambda_2 = -\frac{q}{V}$$

Asymptotiskt stabilt (givet att $q, V, k_1 > 0$)

Exempel: mekaniska systemet

Egenvärdena till A -matrisen ges av

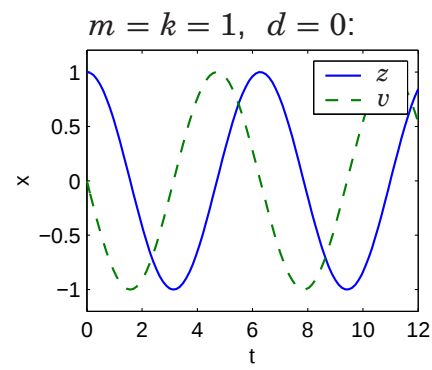
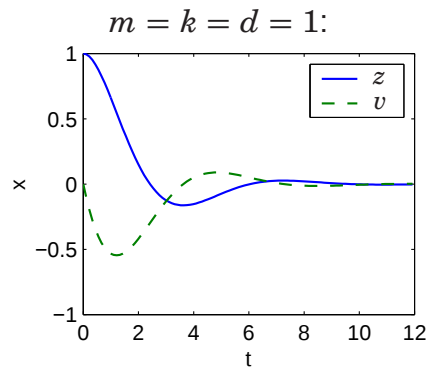
$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k}{m} & \lambda + \frac{d}{m} \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{d}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{d}{2m} \pm \frac{\sqrt{d^2 - 4mk}}{2m}$$

Antag $m, k > 0$

Asymptotiskt stabilt om $d > 0$, stabilt om $d \geq 0$

Simulering av mekaniska systemet



Linjära system på tillståndsform i MATLAB

```
% Definiera systemmatriser
```

```
A = [1 2; 3 4];
```

```
B = [0; 1];
```

```
C = [1 0];
```

```
D = 0;
```

```
% Skapa tillståndsmodell
```

```
sys = ss(A,B,C,D);
```

```
% Beräkna egenvärden till A-matrisen
```

```
eig(A)
```

```
% Simulera systemet utan insignal från ett visst initialvärde  
initial(sys,x0)
```

Nästa föreläsning

- Laplacetransformen
- Överföringsfunktion

Rekommenderad läsning: *Process Control*: 3.5–3.6