

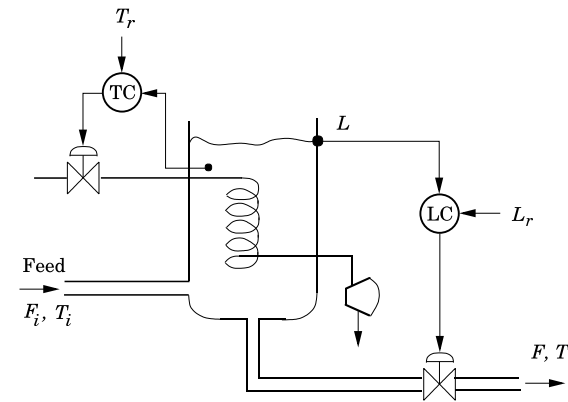
Föreläsning Y

Multivariabel reglering

- Flera in- och utsignaler
- Stabilitet och interaktion
- Para ihop in- och utsignaler (RGA)
- Eliminera interaktion (särkoppling)

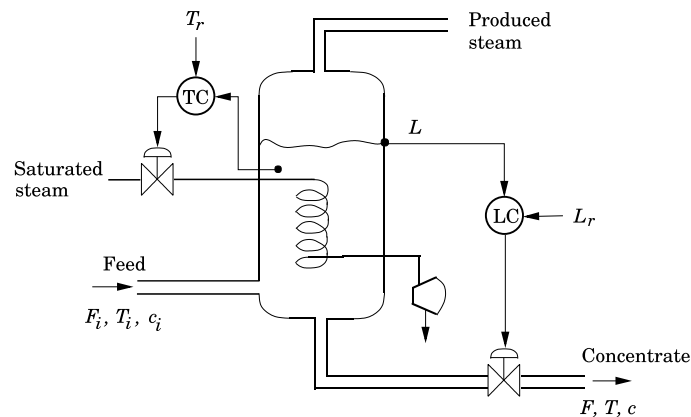
Rekommenderad läsning: *Process Control*: 9.1–9.6

Exempel 1: Nivå och temperatur i tank



- Temperaturen påverkar ej nivån
- Nivån påverkar temperaturen

Exempel 2: Nivå och temperatur i indunstare



- Temperaturen påverkar nivån
- Nivån påverkar temperaturen

Multivariabla systembeskrivningar

Tillståndsbeskrivning: u och y är vektorer

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

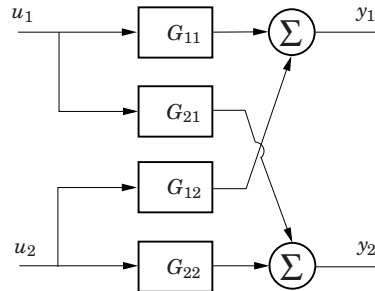
Överföringsfunktioner, t.ex.:

$$Y(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} U(s) = G(s)U(s)$$

$G(s)$ – Systemets överföringsmatris

Samband: $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

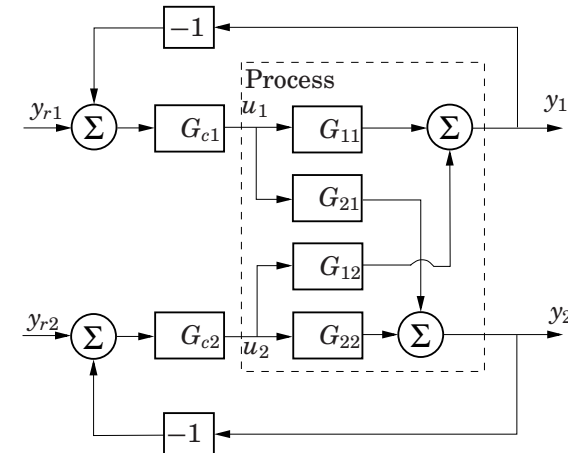
Blockschema, t.ex.:



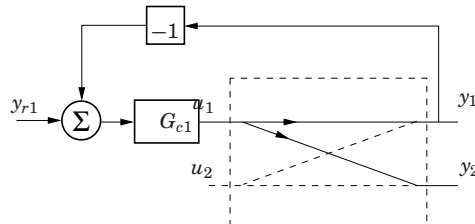
Stabilitet för multivariabla system

Varje krets, sluten för sig, kan vara stabil, men systemet kan ändå vara instabilt när flera kretsar sluts samtidigt!

Exempel:



Endast första kretsen sluten:



Utsignalernas beroende av insignalen y_{r1} :

$$Y_1 = \frac{G_{11}G_{c1}}{1 + G_{11}G_{c1}} Y_{r1}$$

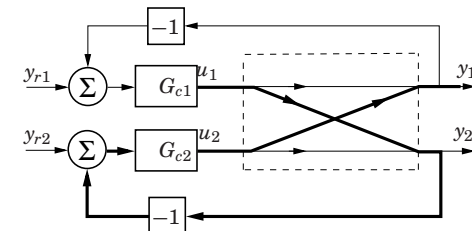
$$Y_2 = G_{21}U_1 = \frac{G_{21}G_{c1}}{1 + G_{11}G_{c1}} Y_{r1}$$

Stabiliteten bestäms av det karakteristiska polynomet

$$1 + G_{11}G_{c1}$$

(Motsvarande samband för andra kretsen)

Båda kretsarna slutna samtidigt:



Utsignalernas beroende av insignalerna y_{r1} och y_{r2} :

$$Y_1 = \frac{G_{11}G_{c1} + G_{c1}G_{c2}(G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})}{A} Y_{r1} + \frac{G_{12}G_{c2}}{A} Y_{r2}$$

$$Y_2 = \frac{G_{21}G_{c1}}{A} Y_{r1} + \frac{G_{22}G_{c2} + G_{c1}G_{c2}(G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})}{A} Y_{r2}$$

Stabiliteten bestäms av det karakteristiska polynomet

$$A(s) = (1 + G_{11}G_{c1})(1 + G_{22}G_{c2}) - \underline{G_{12}G_{21}G_{c1}G_{c2}}$$

- Interaktionerna G_{12} och G_{21} kan förstöra stabiliteten

Stabilitet – allmänna fallet

Multivariabel process och multivariabel regulator:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_p(s)U(s) \\ U(s) &= G_r(s)(Y_r(s) - Y(s)) \end{aligned}$$

Återkopplat system:

$$Y(s) = G_p(s)G_r(s)(Y_r(s) - Y(s))$$

Lös ut $Y(s)$:

$$Y(s) = (I + G_p(s)G_r(s))^{-1} G_p(s)G_r(s)Y_r(s)$$

Karakteristiskt polynom:

$$A(s) = \det(I + G_p(s)G_r(s))$$

Slutna systemet stabilt om alla rötter till $A(s)$ i vänster halvplan

Relative Gain Array (RGA)

- Ett sätt att konstatera koppling i "kvadratiska" system (lika många insignaler som utsignaler)
- Baserat på den statiska förstärkningen $K = G(0)$
- Normalisering för att undvika skalningsproblem
- Vägledning för ihopparning av in- och utsignaler

Normaliserad förstärkning

1. Öppna systemets statiska förstärkning då $\Delta u_k = 0$, $k \neq j$

$$k_{ij} = G_{ij}(0) = \frac{\Delta y_i}{\Delta u_j}$$

2. Slutna systemets statiska förstärkning då $\Delta y_k = 0$, $k \neq i$ (antag "perfekt" reglering av de andra utsignalerna)

$$l_{ij} = \frac{\Delta y_i}{\Delta u_j}$$

3. Relativa förstärkningen

$$\lambda_{ij} = \frac{k_{ij}}{l_{ij}}$$

RGA för 2×2 -system

Stationära förstärkningar för variationer i insignalerna

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= k_{11}\Delta u_1 + k_{12}\Delta u_2 \\ \Delta y_2 &= k_{21}\Delta u_1 + k_{22}\Delta u_2 \end{aligned}$$

Antag nu att vi kan hålla $\Delta y_2 = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta u_2 &= -\frac{k_{21}}{k_{22}}\Delta u_1 \\ \Delta y_1 &= \left(k_{11} - \frac{k_{12}k_{21}}{k_{22}}\right)\Delta u_1 = \frac{\det K}{k_{22}}\Delta u_1 = -\frac{\det K}{k_{21}}\Delta u_2 \end{aligned}$$

Alltså $l_{11} = \frac{\Delta y_1}{\Delta u_1} = \frac{\det K}{k_{22}}$ och $l_{12} = -\frac{\det K}{k_{21}}$

Matrisen med elementen $1/l_{ij}$ ges därför av

$$\frac{1}{\det K} \begin{bmatrix} k_{22} & -k_{21} \\ -k_{12} & k_{11} \end{bmatrix} = (K^{-1})^T$$

RGA-matrisen Λ

RGA-matrisen Λ har elementen $\lambda_{ij} = k_{ij} \frac{1}{l_{ij}}$, dvs

$$\Lambda = K \times (K^{-1})^T$$

OBS! "×" är elementvis multiplikation (skrivs ibland ".*")

För Λ gäller

- Rad- och kolonnsumma

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{ij} = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} = 1$$

- Systemet lätt att reglera med enkretregulatorer om Λ är (nära) enhetsmatris (efter eventuella permutationer)
- Negativa element svarar mot besvärlig koppling

Exempel 2: Överföringsmatris

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Statiska förstärkningar:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(K^{-1})^T = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Kopplingsförslag: $u_1 - y_1$ och $u_2 - y_2$

Svår multivariabel interaktion

Ihopparning av in- och utsignaler

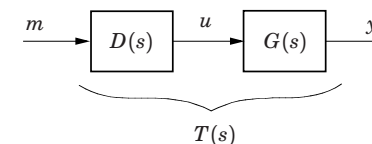
Tumregel: In- och utsignaler ska paras så att motsvarande relativa förstärkning är positiv och så nära ett som möjligt.

Exempel 1:

Λ	Parning	Interaktion
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$u_1 - y_1$ $u_2 - y_2$	Ingen
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$u_1 - y_2$ $u_2 - y_1$	Ingen
$\begin{bmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.15 & 0.85 \end{bmatrix}$	$u_1 - y_1$ $u_2 - y_2$	Svag
$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$	$u_1 - y_1$ $u_2 - y_2$	Svår

Särkoppling

Idé: Inför nya styrsignaler så att systemet blir enklare att styra.



$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)D(s)M(s) = T(s)M(s)$$

- Särkoppling: $D(s) = G(s)^{-1}T(s)$
- Välj $T(s)$ diagonal.
- Då blir

$$D(s) = \frac{1}{\det G} \begin{bmatrix} G_{22}T_{11} & -G_{12}T_{22} \\ -G_{21}T_{11} & G_{11}T_{22} \end{bmatrix}$$

Utformning av särkopplingen

Ett val av särkoppling är följande:

$$D(s) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{G_{12}}{G_{11}} \\ -\frac{G_{21}}{G_{22}} & 1 \end{bmatrix}$$

(andra val av D ligger utanför kursen)

Detta val resulterar i följande särkopplade system:

$$T(s) = \begin{bmatrix} G_{11} - G_{12} \frac{G_{21}}{G_{22}} & 0 \\ 0 & G_{22} - G_{21} \frac{G_{12}}{G_{11}} \end{bmatrix}$$

Detta system kan nu regleras med två vanliga regulatorer

Implementering av särkopplingen

Särkopplingselementen $-\frac{G_{12}}{G_{11}}$ och $-\frac{G_{21}}{G_{22}}$ är omöjliga att implementera om de innehåller

- rena derivator
- negativa tidsfördröjningar

Några lösningsalternativ: lågpasfiltrera, använd bara den statiska förstärkningen, sätt särkopplingselementet till 0

Multivariabel reglering – Exempel 9.11

Process:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Para ihop enligt tidigare RGA-analys: $u_1 - y_1$ och $u_2 - y_2$

Jämför:

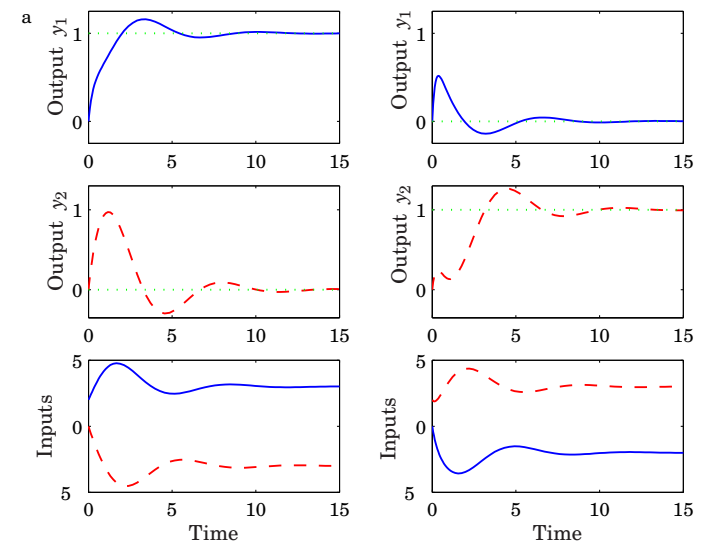
1. Reglering med 2 PI-regulatorer utan särkoppling
2. Reglering med statisk särkoppling

$$D(0) = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T(s) = \begin{bmatrix} \frac{(-s+1)}{(s+1)(s+3)} & \frac{4s}{3(s+1)(s+3)} \\ 0 & \frac{1}{3(s+1)} \end{bmatrix}$$

3. Reglering med dynamisk särkoppling

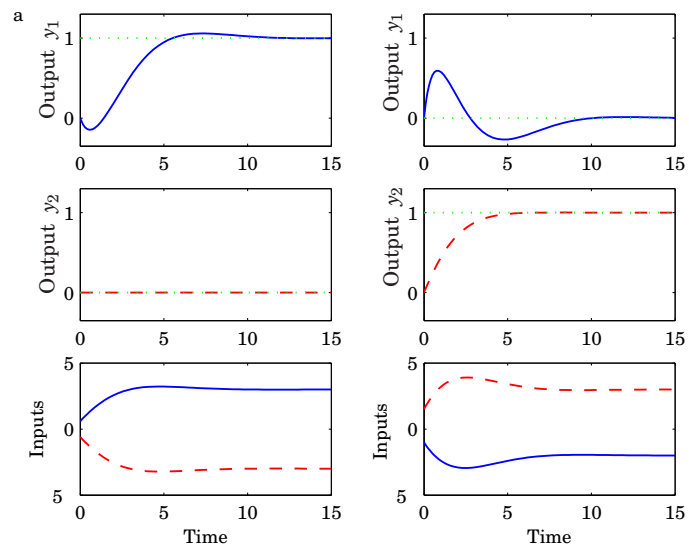
$$D(s) = \begin{bmatrix} 1 & -2\frac{s+1}{s+3} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1-s}{(s+1)(s+3)} & 0 \\ 0 & \frac{1-s}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix}$$

1. Reglering med 2 PI-regulatorer utan särkoppling:



Kraftig interaktion

2. Reglering med statisk särkoppling



3. Reglering med dynamisk särkoppling

