LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK, FRTF05

Tentamen 3 april 2018 kl 14–19

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematisk tabellsamling (TEFYMA eller motsvarande), institutionens formelsamling i reglerteknik, samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas så fort som möjligt via kursens hemsida/Ladok. Rapporteringen i Ladok kan bli fördröjd denna läsperiod.

1. Betrakta ett reglersystem som består av en bil som kör på en väg, regulatorn är föraren som försöker hålla konstant hastighet. Ge exempel på styrsignal, utsignal, referenssignal störsignal. (2 p)

Solution

Styrsignal = gaspedal (även växelläge), utsignal = bilhastighet, referenssignal = önskad hastighet, störsignal = väglutning, vind, älgar, ...

2. Sambandet mellan insignalen u och utsignalen y för ett system ges av differentialekvationen

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = \dot{u}(t) + u(t)$$

a. Ange systemets överföringsfunktion $G(s)$. (1 p)

b. Beräkna poler och nollställen till $G(s)$. (1 p)

c. Skriv systemet på tillståndsform $\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$, ange A, B, C, D (flera varianter är möjliga, du kan själv välja form). (1 p)

Solution

a. $G(s) = \dfrac{s+1}{s^2 + 3s + 2}$

b. Karakteristiska ekvationen $s^2 + 3s + 2 = 0$ ger polerna $s = -2$ och $s = -1$. Nollställe finns då $s = -1$.

c. Styrbar kanonisk form med $a_1 = 3, a_2 = 2, b_1 = 1, b_2 = 1$ och $D = 0$ ger

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

3. En olinjär modell för höjdregleringen av en minihelikopter är (vi antar för enkelhets skull att helikoptern har en enda rotor) (4 p)

$$m\frac{d^2h(t)}{dt^2} = k\omega^2(t) - g$$
$$J\frac{d\omega(t)}{dt} + b\omega^2(t) = u(t)$$

där m, k, J, b är konstanter relaterede till helikoptern, $h(t)$ är höjden, $u(t)$ motorsignal och $\omega(t) \geq 0$ rotorhastighet och g gravitationskonstanten.

a. Skriv systemet på olinjär tillståndsform $\dot{x} = f(x, u)$. Använd $x = [h, \dot{h}, \omega]^T$ som tillståndsvektor.

b. Finn systemets alla jämviktspunkter (x^0, u^0).

c. Bestäm det linjäriserade systemet $\frac{d}{dt}\Delta x(t) = A\Delta x(t) + B\Delta u(t)$. Beror A och B på vilken jämviktspunkt vi linjäriserar systemet kring?

Solution

a. Med $x_1 = h, x_2 = \dot{h}, x_3 = \omega$ får vi

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \frac{k}{m}x_3^2(t) - \frac{g}{m} \\ -\frac{b}{J}x_3^2(t) + \frac{1}{J}u(t) \end{bmatrix} =: f(x,u)$$

b. $f(x,u) = 0$ ger $x_2 = 0$, $kx_3^2 = g$ och $bx_3^2 = u$, samt x_1 (höjden) godtycklig. Jämviktspunkterna ges därför av $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (h, 0, \sqrt{\frac{g}{k}})$, samt $u^0 = bg/k$.

c.

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x^0,u^0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2k}{m}\sqrt{\frac{g}{k}} \\ 0 & 0 & -\frac{2b}{J}\sqrt{\frac{g}{k}} \end{bmatrix}, \qquad B = \frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{(x^0,u^0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}$$

Linjäriseringen beror inte på linjäriseringspunkten i det här fallet. Fysikaliskt beror detta på att dynamiken inte beror på höjden för helikoptern.

4.

a. Skissa nyquist-kurvan till (2 p)

$$G(s) = \frac{3}{(s+1)^3}$$

b. Systemet $Y(s) = G(s)U(s)$ återkopplas med regulatorn $u = K(r-y)$. För vilka $K \geq 0$ är det slutna systemet asymptotiskt stabilt?

(Du behöver inte använda Nyquist-kurvan i deluppgift a om du hellre föredrar att använda en annan metod). (2 p)

Solution

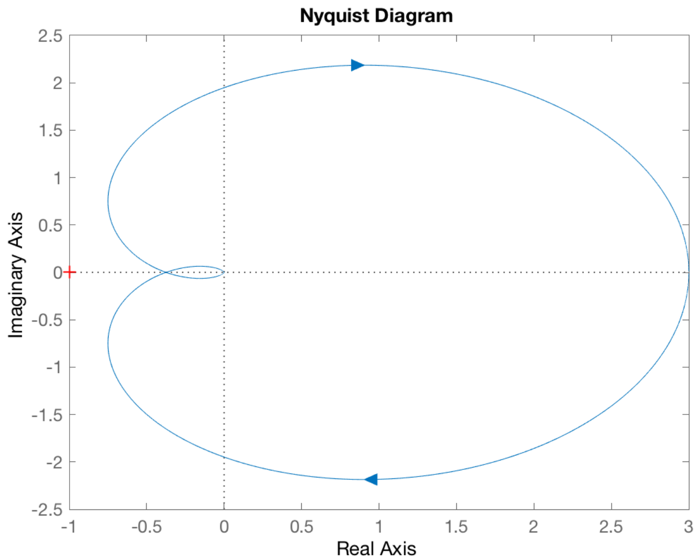
a. Amplituden ges av $|G(i\omega)| = \frac{3}{(\omega^2+1)^{3/2}}$ och fasen av $\arg G(i\omega) = -3\ \text{atan}(\omega)$. Amplituden sjunker alltså från 3 till 0 då frekvensen går från 0 till ∞ och fasen sjunker från 0 till -270 grader. Av speciellt intress är punkten där kurvan skär negativa reella axeln. Detta sker då $-3\ \text{atan}(\omega) = -\pi$, dvs då $\omega = \tan(\pi/3) = \sqrt{3}$, vilket ger amplituden $|G| = 3/(3+1)^{3/2} = 3/8$, dvs skärningen sker i punkten $-3/8$. Det resulterande nyquist-diagrammet visas i figur1.

b. Antingen kan vi använda resultatet i förra deluppgiften vilket direkt ger att systemet är stabilt då $0 \leq K < 8/3$ (negativa K efterfrågades inte).

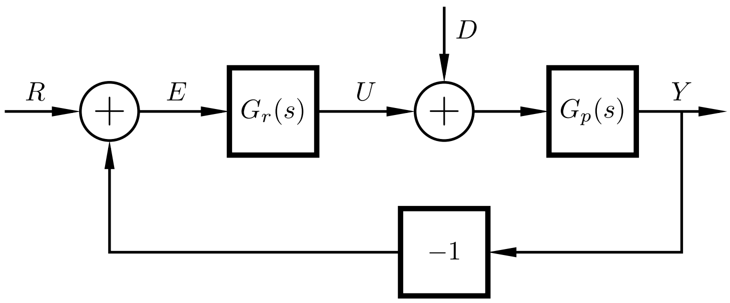
Alternativt kan vi räkna ut överföringsfunktionen för återkopplade systemet

$$\frac{G_0 K}{1 + G_0 K} = \frac{\frac{3K}{(s+1)^3}}{1 + \frac{3K}{(s+1)^3}} = \frac{3K}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + 3K}$$

Stabilitetsvillkoret för 3e ordningens system ger att systemet är stabilt precis då $1+3K > 0$ och $3 \cdot 3 > 1 + 3K$, vilket ger $-1/3 < K < 8/3$. Denna uträkning ger alltså även information om negativa K (vilket vi även kunde fått fram från Nyquistdiagrammet med lite eftertanke).



Figur 1 Nyquist-kurvan i 4.



Figur 2 Reglersystemet i uppgift 5

5. Processen $G_p(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$ regleras med regulatorn $G_r(s) = K > 0$, se figur 5. (4 p)

a. Beräkna stationärt fel $\lim_{t\to\infty} e(t)$ då $R = 0$ och $D(s) = 1/s$ (stegstörning). Ange resultatet för allmänt värde på $K > 0$.

b. Kan man hitta ett värde på K som ger stationärt fel mindre än 0.01, dvs $|\lim_{t\to\infty} e(t)| < 0.01$?

c. Föreslå en bättre regulator som ger ett stabilt slutet system och som ger stationärt fel $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$. (Enbart namn på regulatorstruktur räcker inte, motivering varför det fungerar krävs.)

Solution

a. Vi får $E(s) = \frac{-G(s)}{1+G(s)K} D(s)$ vilket ger

$$sE(s) = \frac{-sG(s)}{1 + G(s)K} 1/s = \frac{-1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K}$$

Systemet är stabilt då $1 + K > 0$ och $3 \cdot 3 < 1 + K$, vilket ger $-1 < K < 8$ (observera likheterna med räkningarna i förra uppgiften). För sådana K kan vi används slutvärdes-satsen som ger

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{-1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K} = \frac{-1}{1+K}$$

b. Villkoret är uppfyllt om $K > 99$ men eftersom dessa värden ger instabila system går det ej att hitta ett K som löser uppgiften.

c. En I-regulator $G_r(s) = K/s$ ger en kretsöverföringsfunktion $G_0 = \frac{K}{s(s+1)^3}$. En skiss av Bode-diagram eller Nyquist-kurva visar att slutna systemet är stabilt för tillräckligt små $K > 0$. I-delen i regulatorn säkerställer då att stationärt fel försvinner. Även en PI-regulator, eller PID-regulator kan användas, med liknande analys.

6. En processen ges av

$$G_P(s) = \frac{s+2}{(2s+1)^3}$$

Den återkopplas med en P-regulatorn

$$G_R(s) = 4$$

vilket resulterar i ett asymptotiskt stabilt slutet system.

a. Bestäm känslighetsfunktionen $S(s)$. (1 p)

b. Hur mycket dämpas lågfrekventa laststörningar av reglerkretsen (dvs i sluten loop jämfört med öppen loop)? (1 p)

Solution

a.

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_P G_R} = \frac{(2s+1)^3}{(2s+1)^3 + 4(s+2)}$$

b. Eftersom $S(0) = 1/9$ dämpas laststörningen med en faktor 9.

7. Ange om följande påstående är sanna eller falska för systemet (2 p)

$$G(s) = \frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}$$

A) Om $a_k > 0$ för alla k så är systemet stabilt

B) Om $a_k > 0$ för alla k så är systemet asymptotiskt stabilt

C) Om $a_k < 0$ för något k så är systemet instabilt

D) Om $a_k = 0$ för något k så är systemet instabilt

Motivera. Ange motexempel till eventuella falska påståenden.

Solution

A,B,D falska (tredje ordningens system är motexempel till A,B, en integrator är motexempel till D). C är dock sann.

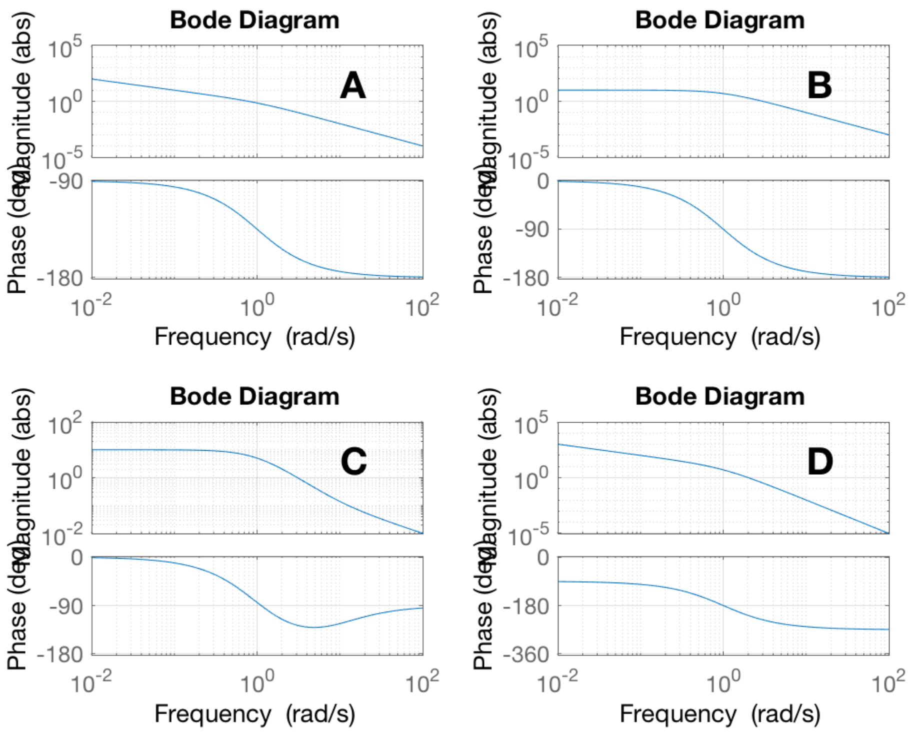
8. Bode-diagrammen A-D i Figur 3 visar kretsförstärkningen $G_0 = G_p G_{R,i}$ då processen $G_p(s) = 1/(s+1)^2$ styrs med någon av följande alternativa regulatorer (med standardmässig enkel återkoppling)

$$G_{R,1}(s) = 10 \qquad \text{P-regulator}$$

$$G_{R,2}(s) = \frac{10}{s} \qquad \text{I-regulator}$$

$$G_{R,3}(s) = 1 + \frac{1}{s} \qquad \text{PI-regulator}$$

$$G_{R,4}(s) = 10 + s \qquad \text{PD-regulator}$$



Figur 3 Bode-diagram A-D för $G_0 = G_P G_{R,i}$ i uppgift 8.

a. Para ihop kretsförstärkningarna i A-D med regulatorfall 1-4. (2 p)

b. Vilket av Bode-diagrammen A-D ger ett instabilt sluten system? (1 p)

c. Hur stor ungefär är fas-marginalen i Bode-diagram A? (1 p)

Glöm inte att motivera dina svar.

Solution

a. Om man betraktar enbart processen G_p så har den ett Bode-diagram som vid låga frekvenser har lutning 0 och fas 0, och för höga frekvenser lutning -2 och fas som närmar sig -180 grader. Bode-diagrammet för $G_0 = G_p G_R$ förändras av regulatorn på följande vis i de olika fallen:

Fall 2 och 3, med enbart I-del, känns igen av att fasen för G_0 börjar på -90 grader och amplitudkurvan har lutning -1 för låga frekvenser, alltså figur A och D. För höga frekvenser kommer fall 2 ha lutning -3 och fas -270 grader, det är alltså figur D. Fall 3 kommer ha lutning -2 och fas -180 grader, alltså figur A.

Fall 1 med P-regulator ger $G_0 = 10/(s+1)^2$ vilket känns igen som figur B.

Fall 4 med med PD-regulatorn är den enda som kommer ge lutning -1 och fas -90 grader för höga frekvenser, alltså figur C.

Svar: 1-B, 2-D, 3-A, 4-C

b. Figur D är den enda där fasen sjunker under 180 grader. Vi ser att amplituden är större än 1 då detta händer. Fall D ger därför ett instabilt system.

c. Vi ser att amplituden blir 1 något till vänster om $\omega = 1$, ungefär vid $\omega = 0.8$. Avläsning av fasen vid denna frekvens ger ungefär -130 grader, så fasmarginalen är cirka 50 grader. En noggrannare uträkning, när vi vet att regulatorn ges av fall 3, skulle se ut så här

$$|G_0(i\omega)| = |G_p(i\omega)||G_{R,3}(i\omega)| = \frac{1}{1+\omega^2}\sqrt{1+\frac{1}{\omega^2}}$$

Skärfrekvensen ges av $|G_0(i\omega_c)| = 1$ vilket ger $1 = \frac{1}{\omega_c\sqrt{1+\omega_c^2}}$ vilket ger $\omega_c = 0.786$. Vi får sedan fasmarginalen

$$\varphi_m = \pi + \arg(G_p(i\omega_c)G_{R,3}(i\omega_c))$$

vilket med $\arg(G_p(i\omega_c)) = -2\arctan(\omega_c)$ och $\arg(G_{R,3}(i\omega_c)) = -\arctan\frac{1}{\omega_c}$ ger

$$\varphi_m = 3.142 - 1.332 - 0.905 = 0.905 \text{ rad} = 51.8 \text{ grader.}$$