LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK, FRT010

Tentamen 15 mars 2017 kl 8–13

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

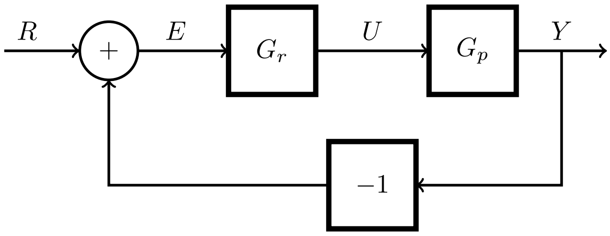
Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK.



Figur 1 Enkelt återkopplat system i problem 2.

1. Betrakta systemet $Y(s) = G(s)U(s)$ där (4 p)

$$G(s) = \frac{1-s}{s^2+2s+1}$$

a. Beräkna systemets poler och nollställen samt stationär förstärkning. Är systemet asymptotiskt stabilt?

b. Finn en differentialekvation som relaterar $u(t)$ och $y(t)$

c. Beräkna stegsvaret till $G(s)$. (Ledtråd: Stegsvaret till systemet $G_1 = 1/(s+1)^2$ är $y_1(t) = 1 - (1+t)e^{-t}$)

Solution

a. Dubbelpol $s = -1$, nollställe $s = 1$. Stationär förstärkning $G(0) = 1$. Systemet är asymptotiskt stabilt.

b.

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = u(t) - u'(t)$$

c. Eftersom $G(s) = (1-s)G_1(s)$ är $Y(s) = (1-s)Y_1(s)$, dvs

$$y(t) = y_1(t) - y_1'(t) = 1 - (1+t)e^{-t} - te^{-t} = 1 - (1+2t)e^{-t}$$

2. En process ges av (3 p)

$$G_p(s) = \frac{1}{s+2}.$$

Processen återkopplas enkelt enligt Figur 1 med en PI-regulator som ges av

$$G_r(s) = 2 + \frac{3}{s}.$$

a. Bestäm slutna systemets poler, och avgör om slutna systemet är asymptotiskt stabilt.

b. Beräkna stationärt fel $\lim_{t\to\infty} e(t)$ då referensen är ett steg, $r(t) = 1, t > 0$.

c. Beräkna stationärt fel $\lim_{t\to\infty} e(t)$ då referensen är en ramp, $r(t) = t, t > 0$.

Solution

a. Slutna systemet ges av

$$\frac{G_pG_r}{1+G_pG_r} = \frac{\frac{1}{s+2}(2+\frac{3}{s})}{1+\frac{1}{s+2}(2+\frac{3}{s})} = \frac{2s+3}{s^2+4s+3}.$$

Slutna systemets poler bestäms av karakteristiska ekvationen $s^2+4s+3=0$, vilket ger $s=-1$ och $s=-3$. Eftersom polerna ligger i vänster halvplan är slutna systemet asymptotiskt stabilt.

b. Vi får med $R(s) = 1/s$

$$sE(s) = s\frac{1}{1+G_p(s)G_r(s)}R(s) = \frac{s(s+2)}{s^2+4s+3}$$

Eftersom rötterna ligger i VHPL kan slutvärdesteoremet användas. Detta ger

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = 0$$

Dvs stegsvar ger inget stationärt fel.

c. Liknande räkning ger med $R(s) = 1/s^2$ att

$$sE(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3}$$

vilket ger stationärt fel för rampsvar

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{2}{3}.$$

3. Beskriv problemet med integrator windup i en PID regulator. Illustrera med ett exempel från verkliga livet. Beskriv också hur problemet kan undvikas. (2 p)

Solution

Se kompendiet.

4. Ett system på tillståndsform ges av ekvationerna (3 p)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

a. Vad blir systemets överföringsfunktion $G(s)$?

Vad är villkoren på parametrarna a, b, c för att systemet skall vara

b. stabilt

c. asymptotiskt stabilt

d. styrbart

e. observerbart

Solution

a. Vi får

$$
\begin{aligned}
G(s) &= C(sI - A)^{-1}B = C \begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ a & s \end{pmatrix}^{-1} B \\
&= \frac{1}{s^2+s+a} \begin{pmatrix} c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 1 \\ -a & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \\
&= \frac{bc}{s^2+s+a}.
\end{aligned}
$$

b. Polerna beror bara på parametern a. För $a > 0$ ligger polerna strikt i vänster halvplan, för $a = 0$ har man en enkelpol i $s = 0$ och den andra polen i $s = -1$. Systemet är stabilt för $a \geq 0$

c. $a > 0$, se oven

d. Vi får styrbarhetsmatris

$$
W_s = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}
$$

vilken är inverterbar omm $b \neq 0$. Systemet är alltså styrbart då $b \neq 0$

e. Vi får observerbarhetsmatris

$$
W_0 = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ -c & c \end{pmatrix}
$$

som är inverterbar omm $c \neq 0$. Systemet är alltså observerbart då $c \neq 0$.

5. I figur 2 visas Bode-diagrammet för (6 p)

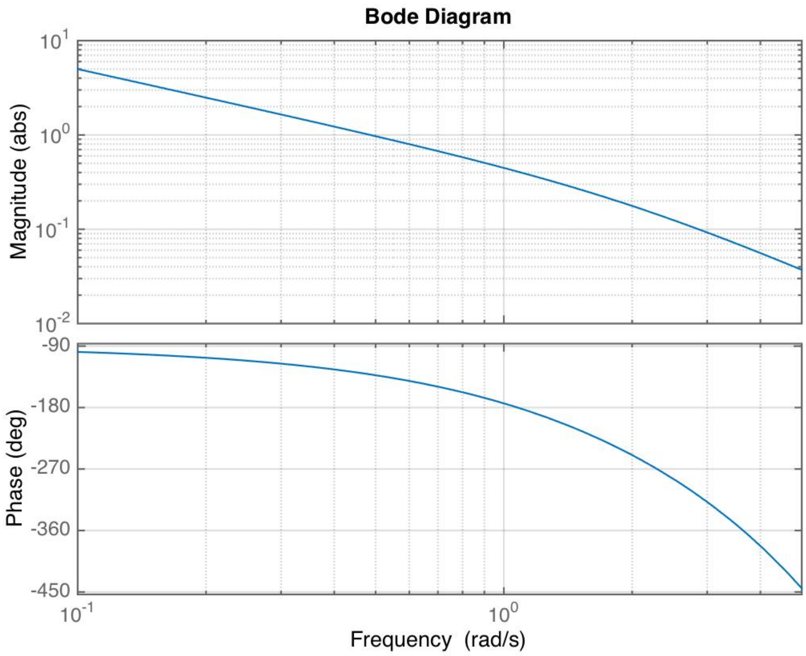
$$
G_p(s) = \frac{e^{-s}}{s(s+2)}.
$$

a. Bestäm amplitud och fasmarginal om systemet återkopplas enkelt, dvs med $U(s) = R(s) - Y(s)$.

b. Skissa Nyquist-diagrammet för $G_p(s)$.

c. Designa en fas-avancerande regulator $G_r(s) = K_k N \frac{s+b}{s+bN}$ så att slutna systemet (enligt figur 1) får skärfrekvens $\omega_c = 1$ och fasmarginal $\phi_m = 60$ grader.

d. Noggrannare undersökning av processen G_p visar att tidsfördröjningen är 2 sekunder i stället för 1 sekund såsom tidigare antagits. Kommer slutna systemet bli stabilt med regulatorn G_r i förra deluppgiften?



Figur 2 Bode-diagram för $G_p(s)$ i uppgift 5

Solution

a. Avläsning ur Bode-diagrammet ger $A_m \approx 2.5$ och $\varphi_m \approx 50$ grader.

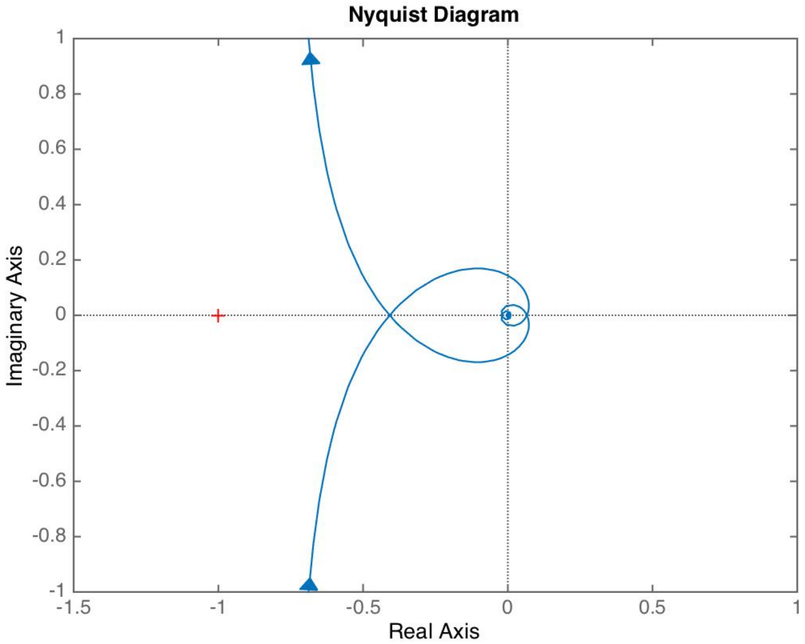
b. Se figur

c. Med $\omega_c = 1$ fås $\arg G_p(i\omega_c) = -\omega_c - \pi/2 - \arctan(\omega_c/2) = -1 - \pi/2 - 0.4636 = -3.03$ radianer $= -174$ grader. (Detta värde kan även avläsas ur diagrammet direkt.) Vi behöver alltså förbättra fasen $60 + 174 - 180 = 54$ grader. Avläsning ur diagram i formelsamlingen ger $N = 10$. Från villkoret $\omega_c = b\sqrt{N}$ får vi $b = 1/\sqrt{10} = 0.32$. Ur sambandet $K_k\sqrt{N}|G_p(i\omega_c)| = 1$ och avläsning $|G_p(i\omega_c)| \approx 0.45$ fås $K_k = 1/(0.45\sqrt{10}) = 0.71$.

(Anmärkning: Även om fasmarginalen är god så visar sig amplitudmarginalen för denna design vara låg, $A_m = 1.33$, man bör därför sänka skärfrekvensen för att få en bättre design.).

d. Med ytterligare 1 sekunds tidsfördröjning kommer fasen vid frekvensen $\omega = 1$ försämras med 1 radian = 57 grader. Eftersom fasmarginalen var 60 grader så kommer slutna loopen att förblir stabil (men väldigt nära instabilitet, fasmarginalen är nu bara 3 grader).

6. I Figur 3 och 4 visas sex stycken Bode-diagram respektive stegsvar. Fem av Bodediagrammen hör ihop med varsitt stegsvar (i öppen loop, dvs ingen reglerloop sluts kring systemen). Avgör vilka som hör ihop. Det blir alltså ett Bodediagram och ett stegsvar över. Notera att diagrammen har olika skalor på axlarna. Motivera ditt svar. (2.5 p)



Figur 3 Nyquistdiagram för $G_p(s)$ i uppgift 5

Solution

Bode 1 innehåller en integrator, och måste således tillhöra Stegsvar B.

Både Bode 2 och Bode 3 motsvarar första ordnigngens system med statisk förstärkning 10, men Bode 3 bryter ned senare och motsvarar således ett snabbare system. Alltså tillhör Bode 2 Stegsvar C och Bode 3 Stegsvar F.

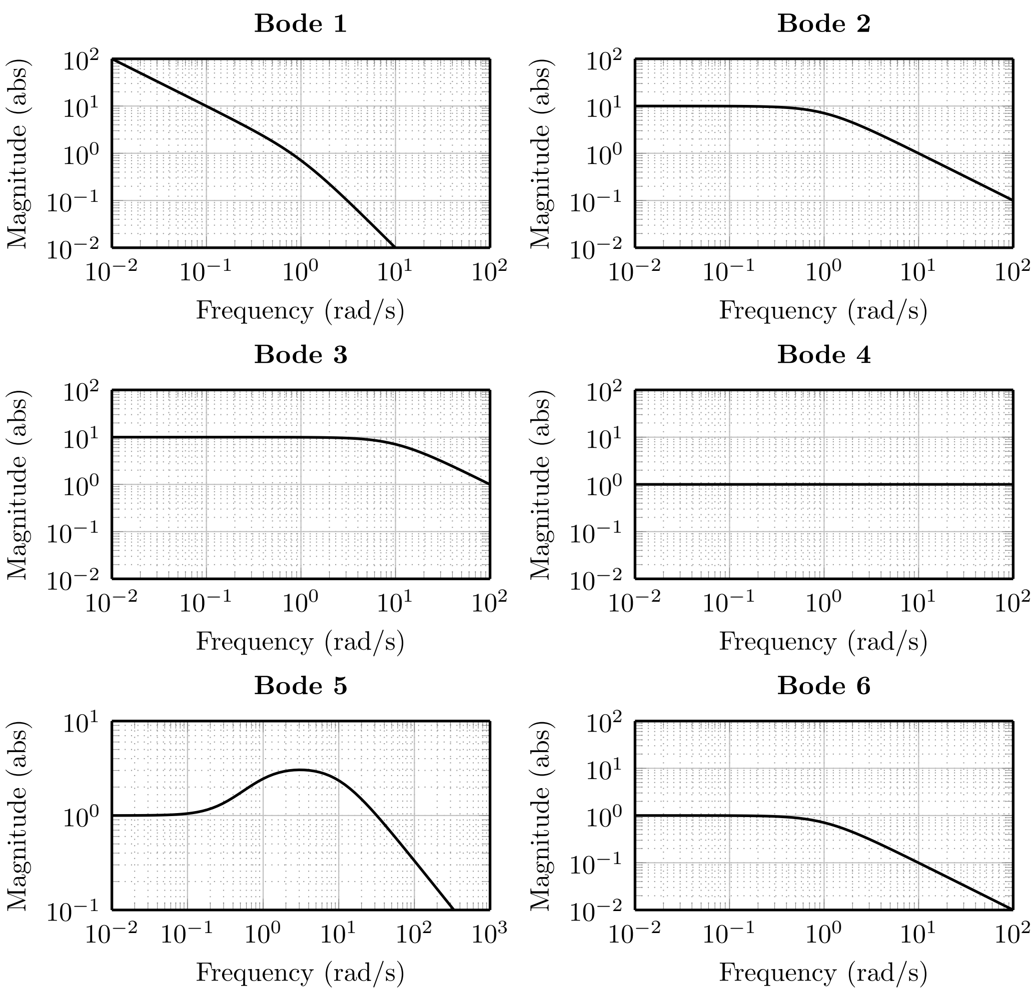
Bode 6 är ett första ordningens system med statisk förstärkning 1, vilket svarar mot Stegsvar A.

Bode 4 motsvarar systemet $G(s) = 1$ vars stegsvar är ett steg, någon sådan figur finns dock inte.

Kvar finns nu enbart Bode 5. Stegsvar E har slutvärde 10 och kan därför inte motsvara Bode 5. Bode 5 hör därför ihop med D.

Bode 5 bryter först upp, vilket innebär att systemet har ett nollställe. Stegsvar D går åt fel håll, vilket är karakteristiskt för system med nollställe i höger halvplan. Detta stöder ytterligare kombinationen 5-D.

Svar: 1-B, 2-C, 3-F, 5-D, 6-A. (4 och E saknar motsvarighet)



Figur 4 Bodediagram till Problem 6.

7. En förenklad modell av höjddynamiken för en mindre leksakshelikopter ges av

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

där u är insignalen till motorn och y höjden. Designa en tillståndsåterkoppling $u = -Lx$ som ger karakteristiskt polynom $s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$ för slutna systemet. Vad finns det för fördelar och nackdelar med att öka parametern ω? (2.5 p)

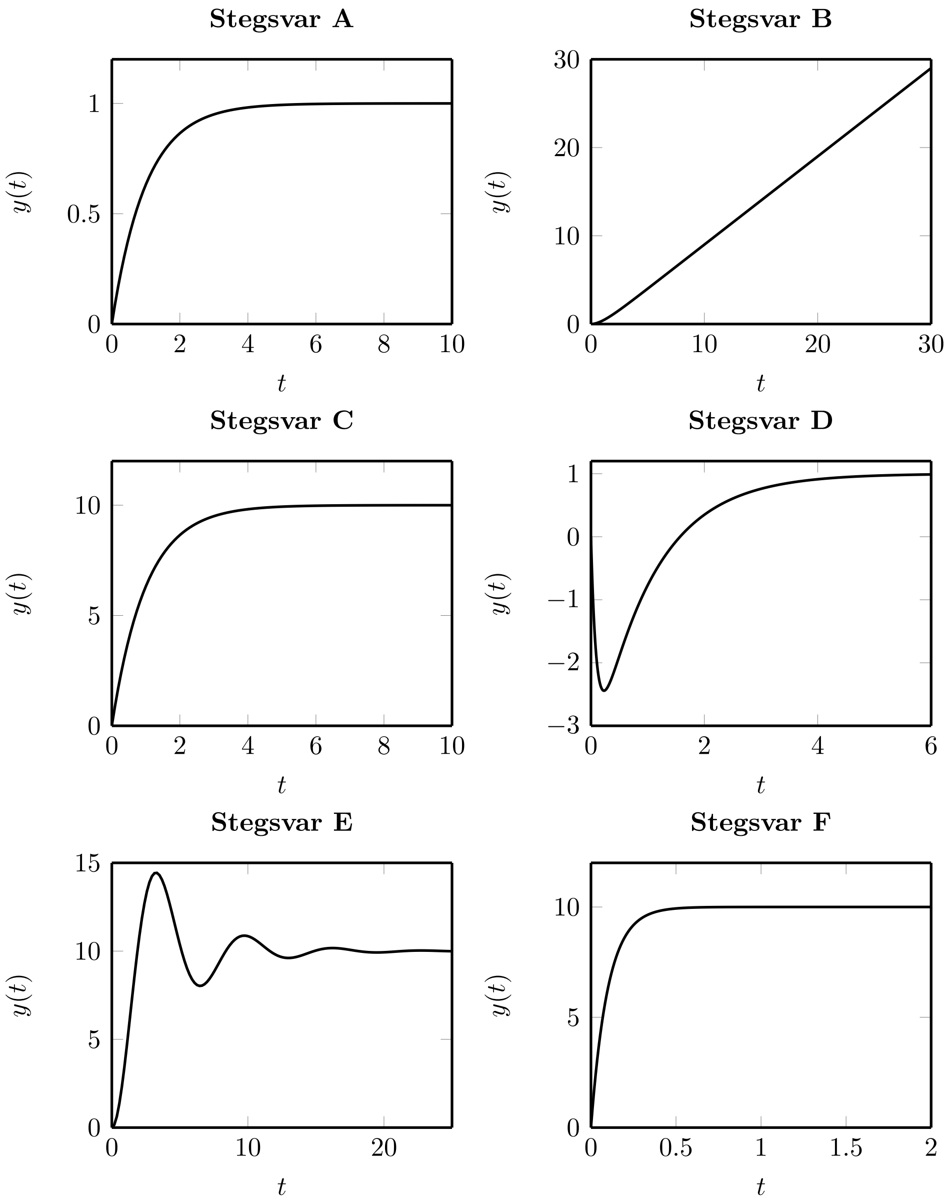
Solution

Låt $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}$, då blir

$$sI - A + BL = \begin{bmatrix} s & -1 \\ l_1 & s + l_2 \end{bmatrix}.$$

Designekvationen $\det(sI - A + BL) = s(s + l_2) + l_1 = s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$ ger

$$L = \begin{bmatrix} \omega^2 & 2\zeta\omega \end{bmatrix}.$$



Figur 5 Stegsvar till Problem 6.

Ett större värde på ω ger ett snabbare slutet system, dvs tightare höjdreglering. Nackdelen är att det krävs större styrsignaler och att man därför kan drabbas av styrsignalmättning eller bli mer känslig för eventuella mätstörningar.

8. Överföringsfunktionen för en PD-regulator med filter ges av

$$G_r(s) = K\frac{1+sT_d}{1+sT_f}, \qquad T_d > 0,\ \ T_f > 0.$$

Avgör om följande påstående är sanna eller falska. Motivera! (2 p)

a. Villkoret för att $G_r(s)$ ska vara en fasavancerande länk är att $T_d > T_f$.

b. Om T_f ökar så ger G_r mer fasavancering vid alla frekvenser.

c. Om $T_d = 10$ och $T_f = 1$ ger G_r ungefär 55 graders fasavancering som mest.

d. Maximal fasavancering inträffar vid frekvensen $\omega = \sqrt{T_d T_f}$ rad/s

Solution

Om vi jämför med formelsamlingens uttryck för fasavancerande länk

$$G(s) = K_k \frac{1 + s/b}{1 + s/(bN)}$$

ser vi att $b = 1/T_d$ och $bN = 1/T_f$, dvs $N = T_d/T_f$.

a. Sant, detta är villkoret $N > 1$

b. Falskt. Fasen ges av $\arg G_r(i\omega) = \arctan \omega T_d - \arctan \omega T_f$. Vi ser att fasen minskar om T_f ökar.

c. Sant. Vi har $N = T_d/T_f = 10$, avläsning i diagram ger 55 grader.

d. Falskt. Rätt svar är $\omega = \frac{1}{\sqrt{T_d T_f}}$ rad/s. (Uttrycket i uppgiften har till och med fel dimension.)