LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 24 augusti 2015 kl 8-13

Poängberäkning och betygsättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK. Tidpunkt och lokal för visning meddelas via kurshemsidan.

Lycka till!

Lösningar till tentamen i Reglerteknik AK 2015-01-12

1. Linjärisera följande olinjära tillståndsekvation

$$\dot{x}(t) = 1 - u(t)\sin x(t) + u(t)^2$$
$$y(t) = \mathrm{e}^{x(t)} + x(t)$$

kring den stationära punkten $(x^0,\ u^0,\ y^0) = (0,\ 1,\ 1)$. (2 p)

Solution

Det linjäriserade systemet blir

$$\dot{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)\Delta u$$
$$\Delta y = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, u_0)\Delta x + \frac{\partial g}{\partial u}(x_0, u_0)\Delta u$$

där $f(x, u) = 1 - u\sin x + u^2$ och $g(x, u) = \mathrm{e}^x + x$.

Uträkning av de partiella derivatorna ger

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -u\cos x \qquad \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0) = -\sin x + 2u$$
$$\frac{\partial g}{\partial x} = e^x + 1 \qquad \frac{\partial g}{\partial u} = 0.$$

Insättning av värdena motsvarande den stationära punkten ger slutligen följande linjäriserade modell,

$$\dot{\Delta x} = -\Delta x + 2\Delta u$$
$$\Delta y = 2\Delta x.$$

2. En process ges av

$$G_p(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Processen återkopplas med en PI-regulator som ges av

$$G_r(s) = 1 + \frac{2}{s}.$$

Det slutna systemet klarar att följa stegreferenser utan stationärt fel, men då referensen är en rampsignal $r(t) = ct$ uppstår ett stationärt fel. Beräkna detta stationära fel. (2 p)

Solution

Det öppna systemets överföringsfunktion ges av:

$$G_o(s) = \frac{s+2}{s(s+1)}.$$

Felsignalen är

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_o(s)}R(s) = \frac{s(s+1)}{s^2 + 2s + 2}R(s).$$

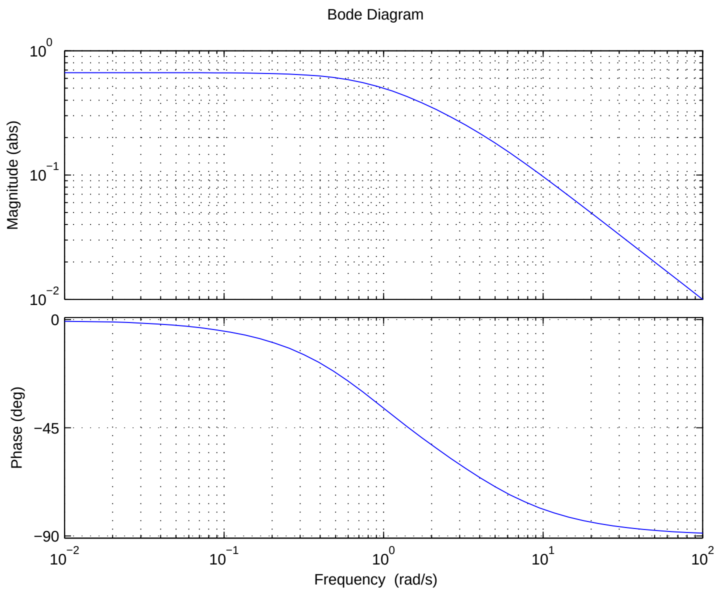
Eftersom $e(t)$ konvergerar för rampsignalen då $t \to \infty$ så kan slutvärdesteoremet användas och

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \frac{s(s+1)}{s^2+2s+2} \frac{c}{s^2} = \frac{c}{2}.$$

3. På en kexfabrik har personalen undersökt en av processerna extra noga vilket resulterat i ett Bodediagram för processen som visas i Figur 1. Nu vänder de sig till dig för att få hjälp med det fortsatta arbetet.

a. Bestäm utsignalen $y(t)$ om insignalen ges av
$u(t) = 3\sin(20t), \ -\infty < t < \infty.$ (2 p)

b. Processen ska regleras med en P-regulator, $G_R(s) = 10$. Vad blir det reglerade systemets dödtidsmarginal? (2 p)



Figur 1 Bodediagram för uppgift 3.

Solution

a. Insignalen har vinkelfrekvensen $\omega = 20$ rad/s. En avläsning ger de ungefärliga värdena $|G(20i)| = 0.05$ och $\arg(G(20i)) = -85° = -1.48$ rad. Vi får således utsignalen
$y(t) = 0.15\sin(20t - 1.48)$

b. Det öppna systemet kommer att ha en förstärkning som är 10 gånger så hög som den för processen. Processen har förstärkningen 10^{-1} vid vinkelfrekvensen 10 rad/s, se Figur 1. Det betyder att det öppna systemet kommer att ha förstärkningen 1 vid denna frekvens, vilket innebär att $\omega_c = 10$ rad/s. Fasen vid denna frekvens kan avläsas till $-80°$, vilket ger en fasmarginal på $\phi_m = 100° = 1.75$ rad.

Dödtidsmarginalen ges nu av
$L_m = \frac{\phi_m}{\omega_c} = 0.175$ s.

4. En process med överföringsfunktionen

$$G_P(s) = \frac{1.5}{s(s+1)(s+2)}$$

återkopplas enkelt. Dessvärre blir det slutna systemet för långsamt, och robustheten otillräcklig. Designa en kompenseringslänk $G_k(s)$ så att det slutna systemet blir dubbelt så snabbt, samtidigt som fasmarginalen blir minst 6° högre. (3 p)

Solution

Använd en fasavancerande kompenseringslänk.

$$G_k(s) = K_K N \frac{s+b}{s+bN}$$

Det okompenserade systemets skärfrekvens ω_c kan bestämmas ur

$$|G_P(i\omega_c)| = \frac{1.5}{\omega_c\sqrt{\omega_c^2+1}\sqrt{\omega_c^2+4}} = 1$$

Detta ger $\omega_c = 0.61$. För att fördubbla snabbheten väljs den nya skärfrekvensen till $\omega_c^* = 1.22$.
Det okompenseade systemet har vid ω_c fasförskjutningen

$$\arg(G_P(i\omega_c) = -90^\circ - \arctan\omega_c - \arctan\frac{\omega_c}{2} = -138.5^\circ$$

Vidare är

$$\arg(G_P(i\omega_c^*) = -172.2^\circ$$

För att fasmarginalen ska höjas med 6° behövs alltså $\Delta\phi_m = 172.2^\circ - 138.5^\circ + 6^\circ = 39.7^\circ$.
Vi ser att $N = 5$ fungerar väl. Slutligen har vi

$$b = \frac{\omega_c^*}{\sqrt{N}} = 0.55$$
$$K_K = \frac{1}{\sqrt{N}|G_P(i\omega_c^*)|} = 1.35$$

5. Ett servosystems dynamik kan, efter normalisering, skrivas på tillståndsform med

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + Bu$$
$$y = Cx.$$

Systemet är tänkt att regleras med tillståndsåterkoppling. Processen ifråga är sådan att man vid dess design har två möjliga val av B-matris.

Vilken av $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ bör man välja och varför? (2 p)

Solution

För att det återkopplade systemets poler ska kunna placeras godtyckligt måste B väljas så att systemet är styrbart. Styrbarhetsmatrisen ges av

$$W_s = [\,B \quad AB \quad A^2B\,]$$

där

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Styrbarhetsmatrisen för $(A,\, B_1)$ är

$$W_s^1 = [\,B_1 \quad AB_1 \quad A^2B_1\,] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vilken inte har full rang. Styrbarhetsmatrisen för $(A,\, B_2)$ är

$$W_s^2 = [\,B_2 \quad AB_2 \quad A^2B_2\,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

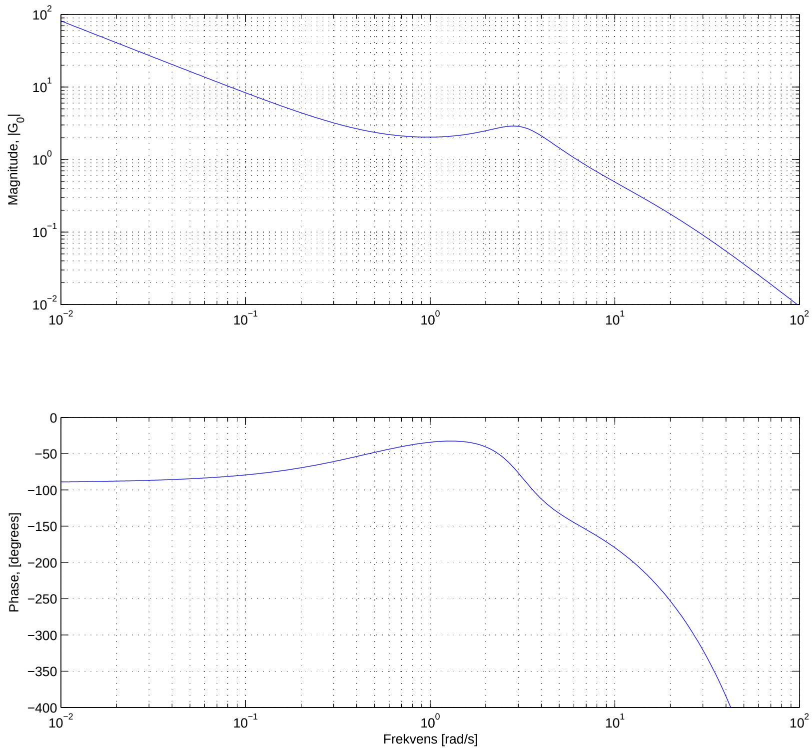
Denna matris har full rang och således bör man välja B_2.

6. Bode- och Nyquistdiagrammet för en oscillativ process med en tidsfördröjning L, som regleras med en kombination av en PI-regulator och en fasavancerande kompenseringslänk, kan ses i figur 2 och 3.

a. Hur stora är systemets amplitud-, fas- och dödtidsmarginaler? (2 p)

b. Vad säger amplitud- och dödtidsmarginalen om stabiliteten för det slutna systemet vid eventuella variationer hos processens statiska förstärkning respektive dödtid? (1 p)

Solution



Figur 2 Bodediagrammet för det öppna systemet i uppgift 6.

a. Amplitudmarginalen kan utläsas ur antingen Nyquist- eller Bodediagrammet vid den frekvens ω_0 där fasen är $-180°$.

$$A_m = 1/|G_0(i\omega_0)| \approx 1/0.5 = 2. \tag{1}$$

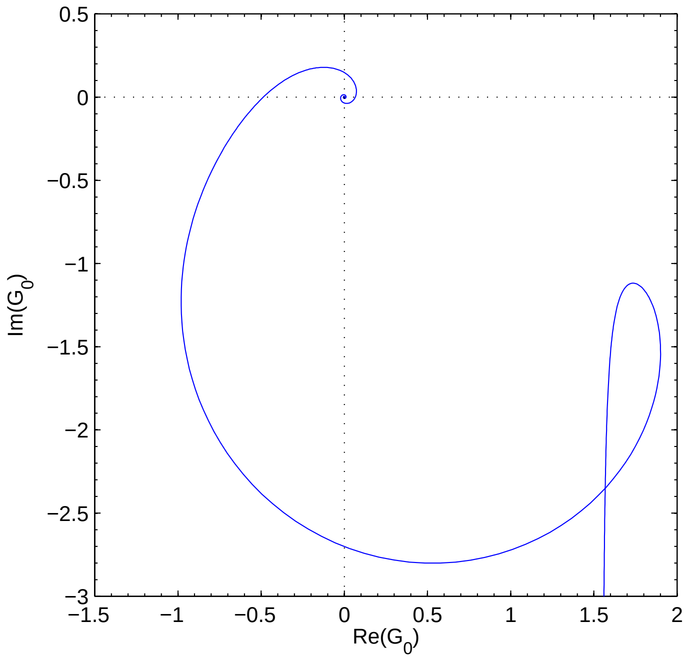
Fasmarginalen kan också den utläsas ur antingen Nyquist- eller Bodediagrammet vid den frekvens ω_c där förstärkningen är 1.

$$\varphi_m = 180° + \arg(G_o(i\omega_c)) = 180° - 147° = 33°. \tag{2}$$

Dödtidsmarginalen ges av $L_m = \varphi_m/\omega_c = \frac{33°}{6\,\mathrm{rad/s}} = \frac{33° \frac{\pi}{180°}}{6\,\mathrm{rad/s}} \approx 0.1\,\mathrm{s}$.

b. Amplitudmarginalen är 2 vilket innebär att det slutna systemet är asymptotiskt stablit så länge processens statiska förstärkning inte blir mer än dubblet så stor.

Dödtidmarginalen är en övre gräns för hur mycket extra tidfördröjning som kan introduceras i öppna systemet innan det slutna system blir instabilt.



Figur 3 Nyquistdiagrammet för det öppna systemet i uppgift 6.

7. En process har överföringsfunktionen

$$G_P(s) = \frac{2}{s^2 - 1}.$$

a. Skriv processen på styrbar kanonisk tillståndsform. (1 p)

b. Ge förslag på en lämplig styrlag för ditt svar i **a.** sådan att systemets båda poler hamnar i -2 och den statiska förstärkningen blir 2. (3 p)

Solution

a. Systemet får följande tillståndsbeskrivning när det skrivs på styrbar kanonisk form

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} x.$$

b. Genom att återkoppla systemet i **a.** med $u = -Lx + l_r r$ där $L = [\, l_1 \quad l_2 \,]$ blir systemmatrisen för det återkopplade systemet

$$A - BL = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 - l_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\det(sI - A + BL) = \det\left(\begin{bmatrix} s + l_1 & -1 + l_2 \\ -1 & s \end{bmatrix} \right) = s^2 + l_1 s - 1 + l_2.$$

Jämförelse med $(s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$ ger att $l_1 = 4$ och $l_2 = 5$.

Det återkopplade systemets statiska förstärkning är

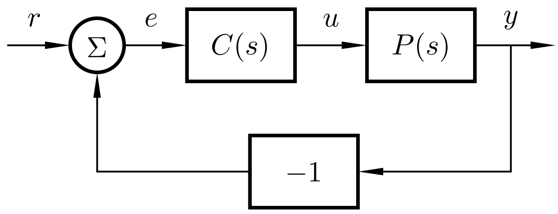
$$G(0) = C(BL - A)^{-1}Bl_r = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} l_r = \frac{1}{2} l_r.$$

Således skall $l_r = 4$.

8. Temperaturutvecklingen i en reaktor där en exotermisk reaktion äger rum kan beskrivas med överföringsfunktionen

$$P(s) = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Processen är instabil och måste således regleras. Reglerstrukturen kan ses i figur 4.



Figur 4 Reglerstruktur för uppgift 8.

a. Bestäm parametrarna i en PD-regulator på formen

$$C(s) = k_p + k_d s$$

så att det slutna systemets poler hamnar i -2. (2 p)

b. Nämn ett problem man kommer stöta på om man i praktiken försöker använda den föreslagna PD-regulatorn, samt en åtgärd för att lösa problemet. (2 p)

c. Vad måste man tänka på när man implementerar en integrerande regulator till en process där det finns begränsningar på styrsignalens storlek? (1 p)

Solution

a. Det slutna systemets överföringsfunktion är

$$G(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{k_p + sk_d}{s^2 + (k_d - 2)\,s + 1 + k_p}.$$

Det önskade karakteristiska polynomet är

$$(s+2)^2 = s^2 + 4s + 4.$$

Identifiering av koefficienterna ger

$$k_p = 3, \quad k_d = 6.$$

b. D-delen gör att regulatorn blir mycket bruskänslig. Mätsignalen eller åtminstone D-delen måste lågpassfiltreras.

c. Om styrsignalen har begränsningar riskerar regulatorn att drabbas av integratoruppwridning (wind-up). Således måste man tänka på att implementera någon form av skydd mot detta dvs. antiwindup.