1. Större ω_0 ger snabbare stegsvar. Större ζ ger bättre dämpning. Alltså är A=(iii), B=(i), C=(ii), D=(iv) (dvs ordning BCAD)

2.

a. Ty'(t)+y(t) = u(t-L)

b. $y(t) = 1 - e^{-(t-L)/T}$ då $t > L$.

c. $T_f = T + L = 11$ μsek.

3.

a. $G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2+1}$

b. Kring positionen rakt ner, polerna ligger på imaginära axeln vilket motsvarar ett system som är marginellt stabilt. (Modellen för pendeln i upprätt läge har en instabil pol med realdel strikt större än noll.)

c. Om $u = -\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} x$, så är

$$det(sI - (A - BL)) = s^2 + l_2 s + l_1 + 1 = s^2 + 4s + 4 = 0 \Rightarrow l_1 = 3, l_2 = 4$$

4. Eftersom systemet är asymptotiskt stabilt, kan slutvärdesteoremet användas. Systemets utsignal ges av

$$Y(s) = \overbrace{\frac{\beta + 2s}{\alpha s^2 + 3s + 2}}^{G(s)} U(s).$$

Den statiska förstärkningen blir

$$G(0) = \frac{\beta}{2},$$

vilket efter avläsning av stegsvaret ger att $\beta = 4$. För att bestämma α tittar vi på begynnelsederivatan, vilken fås av

$$y'(t) = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} \frac{\beta s + 2s^2}{\alpha s^2 + 3s + 2} = \frac{2}{\alpha}.$$

Begynnelsederivatan i stegsvaret avläses till 1, varpå $\alpha = 2$.

5.

a. Statisk förstärkning för systemet $G_P(0) = 1$ så vi har $K_p = 1$, vilket ger

$$K = \frac{T}{L + \lambda} = \frac{T}{L + T} = \frac{10}{11}, \quad T_i = T = 10^{-5}.$$

b. Vi får

$$G_0(s) = \frac{Ke^{-sL}}{sT} = \frac{e^{-sL}}{s(L+T)}$$

Skärfrekvensen ω_c ges av $|G_0(i\omega_c)| = 1$ vilket ger

$$1 = \left| \frac{e^{-i\omega_c L}}{i\omega_c(L+T)} \right| \quad \Rightarrow \quad \omega_c = \frac{1}{L+T} \approx 91000 \text{ rad/s}.$$

För $\omega_c = \frac{1}{L+T}$ har vi $\arg(G(i\omega_c)) = -\frac{\pi}{2} - \frac{L}{L+T}$ vilket ger

$$\phi_m = \frac{\pi}{2} - \frac{L}{L+T} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{11} = 1.48 \text{ rad } = 85 \text{ grader}$$

(vilket är en rätt stor fasmarginal).

6. (B) och (C) är system med komplex poler med dålig dämpning. Amplitudkurvan har därför en resonanstopp, precis som i (5) och (2). Resonanstoppen i (5) ligger vid $w_0 \approx 1$ och resonanstoppen i (2) vid $w_0 \approx 5$. Därför är absolutbeloppet av polerna i (5) större än i (2), vilket ger: (2)-(B) och (5)-(C).

(F) är ett system med två poler och två nollställen. Nollställena ligger närmare origo än polerna. Det betyder fasen börjar vid 90° och därefter ökar. Efter ett tag, vid polernas brytfrekvens, bryter fasen ner mot 0. Därför gäller: (1)-(F).

(3) och (6) har samma förstärkningskurva, men fasen är olika. Polerna och nollställena ligger på samma avstånd från origo för dessa två system. Det betyder de motsvarar (A) och (D). Eftersom (A) har en pol i -1 och ett nollställe i 0 betyder det att fasen för detta system börjar vid 90° och bryter ner vid $w = 1$ mot 0. Därför: (6)-(A). Alltså är (3)-(D). Vilket ger (4)-(E).

7. Om vi antar att C-matrisen ges av $C = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ så får vi observerbarhets-matris

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c-a & c-\alpha\, b & -c \\ a-2\,c & b\,\alpha^2 - c\,\alpha - c & c \end{pmatrix}$$

Om $c = 0$ så blir hela den tredje kolumnen i $\mathcal{O}$ och systemet blir icke-observerbart. Den enda möjligheten är därför att mäta nivån i den tredje sjön, dvs $a = b = 0$ och $c \neq 0$. I detta fall får vi

$$\mathcal{O} = c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -\alpha - 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vilken har determinant $\alpha(1-\alpha)$. Vi har alltså observerbarhet om $\alpha \neq 1$ (att $\alpha > 0$ var angivet i uppgiften).

Man måste alltså mäta nivån i den tredje sjön för att kunna skatta nivån i de båda andra sjöarna, och de båda utflödena från de första sjöarna får inte bero på respektive nivån med samma proportionalitetskonstant.

8. Vi får $Y = G_{cl}R$ med

$$G_{cl} = \frac{G_p G_r}{1 + G_p G_r} = \frac{\frac{2s+1}{s^2}}{1 + \frac{2s+1}{s^2}} = \frac{2s+1}{s^2 + 2s + 1}$$

vilken har dubbelpol i $s = -1$. Dock så har en instabil pol $s = 2$ förkortats i räkningarna, och systemet är ej internt stabilt. Styrsignalen u kommer att innehålla en e^{2t}-term, vilken i teorin inte syns i utsignalen y. I praktiken kommer dock insignalen mätta och utsignalen kommer då att divergera. Man kan inte kancellera instabila poler.