LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 22 augusti 2016 kl 14-19

Poängberäkning och betygsättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK. Tidpunkt och lokal för visning meddelas via kurshemsidan.

Lycka till!

1. Följande andra ordningens system är givet:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.7 & 0.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

a. Är systemet instabilt, stabilt eller asymptotiskt stabilt? (1 p)

b. Är systemet styrbart? (1 p)

c. Att ett system inte är styrbart innebär att inte alla poler går att flytta godtyckligt. Detta system är *stabiliserbart*, vilket innebär att det går att göra asymptotiskt stabilt. Vilka värden på matrisen L i en tillståndsåterkoppling $u = -Lx$ ger ett asymptotiskt stabilt system? (2 p)

Solution

a. Systemet är instabilt eftersom att inte alla koefficienter i det karateristiska polynomet $p(s) = det(sI - A) = s^2 + 0.5s - 0.5$ är positiva.

b. Systemet är inte styrbart eftersom styrbarhetsmatrisen

$$W_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

ej har full rang.

c. $\det(sI - (A - BL)) = s^2 + (l_2 + 0.5)s + l_2 - 0.5$. För att systemet ska vara asymptotiskt stabilt måste båda koefficienterna vara strikt större än noll. Den första koefficienten ger oss att $l_2 > -0.5$. Den andra koefficienten ger att $l_2 > 0.5$. Båda måste vara sanna, så systemet är stabilt för alla $l_2 > 0.5$. l_1 påverkar inte systemets stabilitet.

2. Ett fjäder-massa-dämpar-system, liknande det som studerades i laboration 3, beskrivs av differentialekvationen

$$\ddot{z} + 2\dot{z} + z = u^3$$

där z beskriver positionen hos den massa man vill styra. Mätsignalen ges av $y = \sin(z)$.

a. Inför tillstånden $x_1 = z$, $x_2 = \dot{z}$ och skriv systemet på tillståndsform. (1 p)

b. Hitta systemets samtliga stationära punkter. (1 p)

c. Linjärisera systemet kring den stationära punkt som svara mot $u_0 = 1$. (2 p)

Solution

a. Med de införda tillstånden kan systemet skrivas på formen

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad (= f_1(x_1, x_2, u)) \tag{1}$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + u^3 \qquad (= f_2(x_1, x_2, u)) \tag{2}$$
$$y = \sin(x_1) \qquad (= g(x_1, x_2, u)) \tag{3}$$

b. De stationära punkterna ges då tillståndens derivator är noll dvs.

$$\begin{aligned} 0 &= x_2^0 \\ 0 &= -x_1^0 - 2x_2^0 + u_0^3 \\ y_0 &= \sin(x_1^0). \end{aligned} \tag{4}$$

Från den första ekavationen ser vi att det andra tillståndet är noll i varje stationär punkt. Detta insatt i den andra ekvation ger

$$x_1^0 = u_0^3. \tag{5}$$

De stationär punkterna ges således av $(x^0, u^0, y^0) = (t^3, 0, t, \sin(t^3))$.

c. Den stationära punkten kring vilken vi skall linjärisera systemet är $(1, 0, 1, sin(1))$. De partiella derivatorna ges av

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 && \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 && \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0 \\ &\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -1 && \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2 && \frac{\partial f_1}{\partial u} = 3u^2 \\ &\frac{\partial g}{\partial x_1} = \cos(x_1) && \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 && \frac{\partial g}{\partial u} = 0. \end{aligned}$$

Efter variablebytet $\Delta x = x - x^0$, $\Delta u = u - u_0$ and $\Delta y = y - y_0$ erhålls det linjäriserade systemet genom utvärdera de partiella derivatorna i den stationära punkten som

$$\begin{aligned} \dot{\Delta x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Delta u \\ y &= \begin{bmatrix} \cos(1) & 0 \end{bmatrix} \Delta x \end{aligned}$$

3. Nyquistkurvan för en stabil process visas i Figur 1. Systemet regleras med en P-regulator med $G_R(s) = 2$.

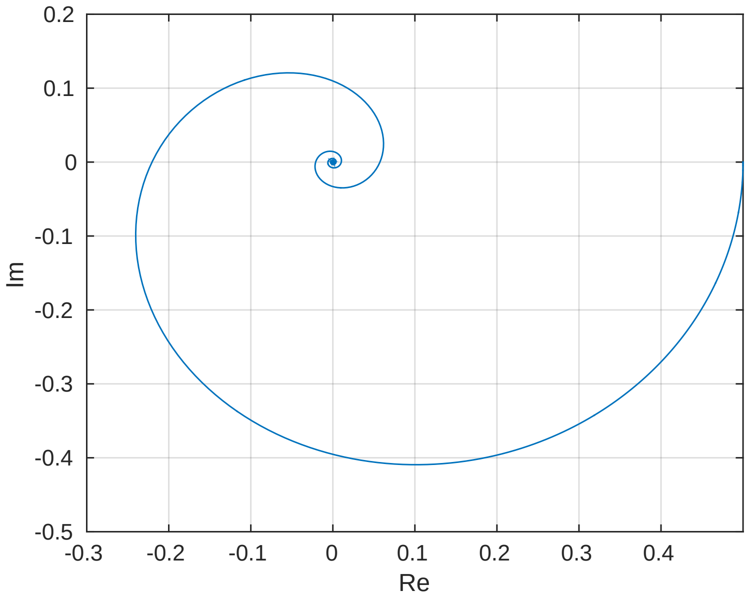
a. Är det återkopplade systemet stabilt? (1 p)

b. Om regulatorn innehåller en tidsfördröjning L så att dess överföringsfunktion blir $G_R(s) = 2e^{-Ls}$, för vilka $L \geq 0$ är det återkopplade systemet stabilt? (1 p)

Solution

a. Med den angivna regulatorn kommer Nyquistkurvan för kretsöverföringsfunktionen att vara densamma som för processen, fast dubbelt så stor i radiell led. Den nya punkten där kurvan skär negativa reella axeln ligger alltså strax till höger om -0.5, och alltså till höger om -1. Enligt Nyquistkriteriet är alltså det återkopplade systemet stabilt.

b. Utan (och med) tidsfördröjningen så är skärfrekvensen för kretsöverföringsfunktionen $\omega_c = 0$. Detta ger oss en oändlig dödtidsmarginal, och det återkopplade systemet är alltså stabilt för alla $L \geq 0$.



Figur 1 Nyquistkurvan för systemet i uppgift 3.

4. En process återkopplas med en P-regulator. Processens överföringsfunktion ges av:

$$G_p(s) = \frac{1}{(3s+1)^3}$$

P-regulatorns överföringsfunktion ges av:

$$G_R(s) = 5$$

a. Bestäm känslighetsfunktionen. (1 p)

b. Hur mycket dämpas lågfrekventa laststörningar av reglerkretsen (dvs i sluten loop jämfört med öppen loop)? (1 p)

c. Känslighetsfunktionens förstärkningsdiagram visas i Figur 2. Vid vilken vinkelfrekvens är reglerkretsen känsligast för störningar och med ungefär hur mycket förstärks störningar som mest av återkopplingen vid denna vinkelfrekvens? (1 p)

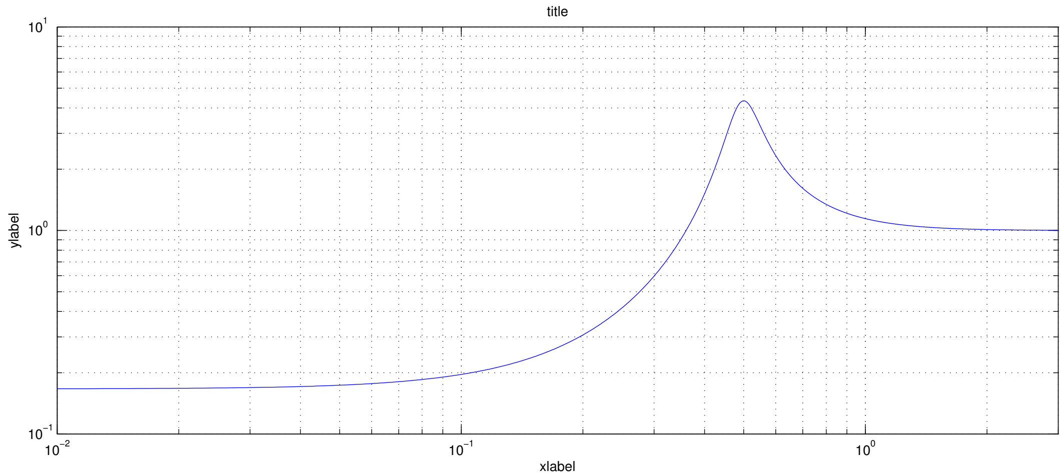
Solution

a. Kretsöverföringsfunktionen ges av:

$$G_0(s) = G_p(s)G_R(s) = \frac{5}{(3s+1)^3}$$

Slutna systemets känslighetsfunktion ges då av:

$$S(s) = \frac{1}{1+G_0(s)} = \frac{(3s+1)^3}{5+(3s+1)^3}$$



Figur 2 Känslighetsfunktionens förstärkningsdiagram

b. Känslighetsfunktionen beskriver hur last- och mätstörningars effekt på utsignalen förstärks eller dämpas av återkopplingen. Lågfrekventa störningar motsvarar $\omega \approx 0$, vilket ger:

$$|S(0)| = \frac{1}{6}$$

Alltså undertrycker återkopplingen lågfrekventa störningars effekt på utsignalen med en faktor $\frac{1}{6}$.

c. Reglerkretsen är som känsligast för störningar där känslighetsfunktionen antar sin största amplitud. I Figur 2 avläses detta till $\omega = 0.5$ rad/s. Vid denna frekvens förstärker återkopplingen störningar med en faktor $|S(0.5i)| \approx 4.3$ (exakt värde är 4.333...)

5. Ett linjärt stabilt system $G(s)$ befinner sig inledningsvis i stationärt läge. Vid tiden $t = 0$ börjas systemet styras med en insignal u på formen:

$$u = 5\sin(4t)$$

Där t anger tiden i sekunder. Antag att systemet är på formen:

$$G(s) = \frac{1}{s+a}$$

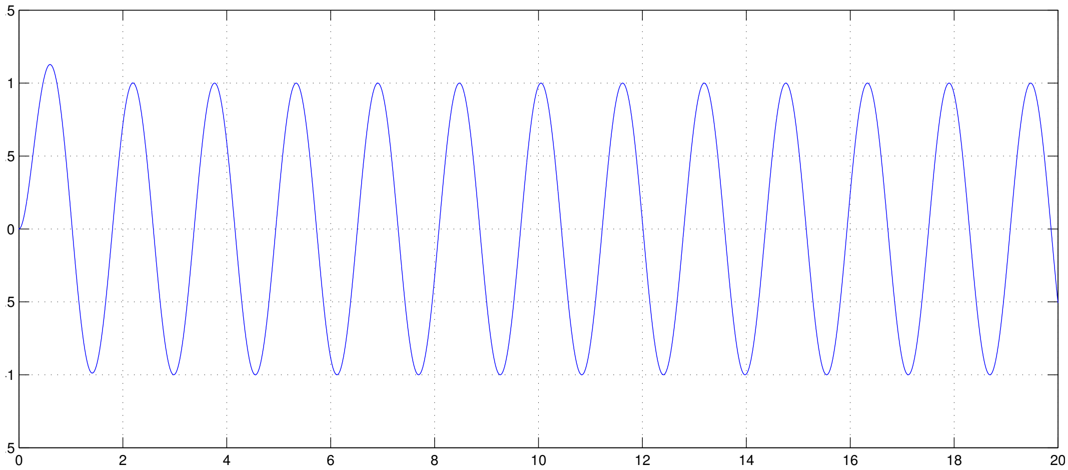
a. Bestäm a utifrån utsignalen från systemet som visas i Figur 3. (1 p)

b. Beräkna systemets utsignal då systemets insignal u ges av:

$$u = 3\sin(3t)$$

Antag att insignalen har skickats in till systemet under en lång tid. (1 p)

Solution



Figur 3 Utsignal

a. Figur 3 ger oss frekvenssvaret för systemet vid frekvensen $\omega = 4$ rad/s. Amplituden på insignalen är 5, medan utsignalens amplitud avläses till 1. Detta innebär att systemets förstärkning vid $\omega = 4$ rad/s är $\frac{1}{5}$. Med denna information löser vi ut a:

$$|G(4i)| = \frac{1}{\sqrt{4^2+a^2}} = \frac{1}{5}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$5^2 - 4^2 = a^2$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$a = \pm 3$$

Eftersom systemet är stabilt måste $a = 3$.

b. Eftersom systemet är linjärt vet vi att utsignalen också kommer att vara sinusformad efter att transienterna har dött ut. Med insignalfrekvensen 3 rad/s får vi:

$$y(t) = 3|G(3i)|\sin(3t + \arg(G(3i)))$$

Sedan har vi att:

$$|G(3i)| = \frac{1}{\sqrt{3^2+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{18}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$
$$\arg(G(3i)) = \arctan(0) - \arctan(\frac{3}{3}) = -\frac{\pi}{4}$$

Detta ger slutligen:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(3t - \frac{\pi}{4})$$

6. En process har överföringsfunktionen

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2-1}.$$

Ge förslag på en lämplig styrlag sådan att det slutna systemet har dubbelpol i -2. Du kan inte mäta något annat än utsignalen. (3 p)

Solution

Denna uppgift kan inte lösas med endast tillståndsåterkoppling, utan kräver i så fall också något slags tillståndsskattare.

Istället löses uppgiften enklast med en PD-regulator $G_c(s) = K(1 + sT_d)$, vilket är typiskt för andra ordningens system. Det slutna systemet får överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{(KT_d)\, s + K}{s^2 + (KT_d)\, s + (K-1)}$$

som ska matchas mot det önskade polynomet

$$p(s) = (s+2)^2 = s + 4s + 4.$$

Detta ger oss att $K = 5$ och $T_d = 0.8$.

7. Avgör om följande påståenden om faskompenserande länkar är sanna eller falska. Systemet som regleras är stabilt vid öppen styrning. Samtliga svar skall motiveras tydligt.

En fasretarderande kompenseringslänk ges av

$$G_{fr} = \frac{s+a}{s+a/M}$$

och en fasavancerande kompenseringslänk ges av

$$G_{fa} = K_K N \frac{s+b}{s+bN}.$$

(2 p)

a. Vid reglering med den fasretarderande kompenseringslänken minskar det stationära felet alltid en faktor M.

b. Förstärkningen för den fasretarderande kompenseringslänken är större eller lika med 1 för alla frekvenser om $M \geq 1$.

c. Den fasavancerande kompenseringslänken är ekvivalent med en lågpassfiltrerad PD-regulator.

d. De fasretarderande och fasavancerande kompenseringslänkarna kan seriekopplas för att få bättre fasmarginal, högre skärfrekvens och minskat stationärt fel.

Solution

a. Falskt. Endast om den reglerade processen innehåller en integrator så minskar det stationära felet med en faktor M.

b. Sant. $|G(i\omega)| = |\frac{i\omega + a}{i\omega + a/M}| \geq 1$

c. Sant. En PD-regulator med ett första ordningens filter ges av

$$C_{PD}(s) = K\frac{1 + sTd}{1 + sT_f}$$

och en fasavancerande kompenseringslänk av

$$C_{fa}(s) = K_K \frac{1 + s/b}{1 + s/(bN)}.$$

De två är ekvivalent med $K = K_K$, $Td = 1/b$ och $T_f = 1/(bN)$.

d. Sant.

8. I en testversion av Linuxdistributionen Fedora beskrivs sambandet mellan antalet beräkningar processorn måste utföra, $u(t)$, och responstiden för användarindata (såsom tiden det tar för tangentbordstryckningar och musrörelser att ge ett synbart resultat), $y(t)$, av överföringsfunktionen

$$Y(s) = \frac{2}{s^2 - s - 6} U(s).$$

a. Är systemet stabilt? (1 p)

b. Antag att vi fritt kan välja processens tillstånd och observera dessa. Kan man med tillståndsåterkoppling placera båda polerna i -4? Om så är fallet, beräkna styrlagen, om inte, motivera varför. (2 p)

Solution

a. Genom att faktorisera nämnarpolynomet fås

$$s^2 - s - 6 = (s+2)(s-3).$$

Systemet har således en stabil pol i -2 och en instabil i 3 och är därför inte stabilt.

b. Vi skriver först systemet på tillståndsform. Vi väljer den observerbara kanoniska formen och får

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x. \end{aligned}$$

Låt $L = [\, l_1 \quad l_2 \,]$. Det återkopplade systemets poler ges av

$$\begin{aligned} \det(sI - (A - BL)) &= \begin{vmatrix} s-1 & -1 \\ -6+2l_1 & s+2l_2 \end{vmatrix} \\ &= s^2 - s + 2l_2 s - 6 + 2l_1. \end{aligned}$$

Vi vill placera båda polerna i -4, vilket ger önskat karakteristisk polynom

$$(s+4)^2 = s^2 + 8s + 16.$$

Jämförelse av koefficienter ger att

$$\begin{aligned} s^1: &\quad 2l_2 - 1 = 8 \\ s^0: &\quad -6 + 2l_1 = 16. \end{aligned}$$

Styrlagen blir således $L = [\, l_1 \quad l_2 \,] = [\, 11 \quad 4.5 \,]$ och systemet kan alltså stabiliseras med en tillståndsåterkoppling.

(*Kommentar:* Om vi istället hade valt den styrbara kanoniska formen hade styrlagen blivit $L = [\, 9 \quad 22 \,]$.)

9. Vattenhöjden x i en tank med ett utlopp i botten och ett inflöde $u \geq 0$ kan beskrivas av differentialekvationen

$$\dot{x} = -\gamma\sqrt{x} + \delta u,$$

där γ och δ beror på tankens egenskaper. Om vi har två parallellkopplade tankar som får halva inflödet vardera så får vi ett andra ordningens system beskrivet av

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\gamma_1\sqrt{x_1} + 0.5\delta_1 u,\\ \dot{x}_2 &= -\gamma_2\sqrt{x_2} + 0.5\delta_2 u.\end{aligned}$$

Antag att tankarna är oändligt höga, d.v.s. att vattnet aldrig rinner över.

a. En tillståndsvektor $\bar{x}$ är styrbar om det finns en styrsignal som överför tillståndet x från initialtillståndet origo till $\bar{x}$ på ändlig tid. Vilka är de styrbara tillståndsvektorerna om tankarna är identiska, d.v.s. $\gamma_1 = \gamma_2$ och $\delta_1 = \delta_2$? (1 p)

b. Om tankarna är identiska bortsett från att tank 1 har större utloppsarea än tank 2 så gäller det att $\delta_1 = \delta_2$ och att $\gamma_1 > \gamma_2$. Ge ett exempel på en styrbar tillståndsvektor och ett exempel på en icke-styrbar tillståndsvektor i detta fall. (1 p)

Solution

a. Eftersom tankarna har samma initialtillstånd och inflöde och $\gamma_1 = \gamma_2$ och $\delta_1 = \delta_2$, så kommer förändringen i höjden i tankarna att vara samma för alla t, och alltså kommer höjderna alltid att vara samma i tankarna. Eftersom $u \geq 0$, kan vi bara nå icke-negativa tillståndsvektorer. Med godtyckligt stor styrsignal till vårt förfogande kan vi få godtyckligt stora vattenhöjder $\bar{x}$.

De styrbara tillståndsvektorerna är alltså alla $\bar{x}$ sådana att $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 \geq 0$.

b. Eftersom tankarna har samma inflöde men tank 1 har större utlopp, så kommer höjden i tank 1 alltid att vara mindre än den i tank 2 om initialtillståndet är sådant att $x_1(0) = x_2(0)$. Alltså måste de styrbara tillståndsvektorerna uppfylla $\bar{x}_1 \leq \bar{x}_2$ med likhet endast då $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$. Precis som innan måste de även vara icke-negativa.

Två exempel på icke-styrbara tillstånd är alltså $\bar{x} = [2 \quad 1]^T$ och $\bar{x} = [-1 \quad -1]^T$. Ett exempel på ett styrbart tillstånd är $\bar{x} = [0 \quad 0]^T$. Fler exempel på styrbara tillstånd kan fås genom att beräkna de stationära punkter som motsvaras av en konstant styrsignal u^0, d.v.s.

$$\begin{gathered} f(\bar{x}, u^0) = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ \bar{x} = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{0.5\delta u^0}{\gamma_1}\right)^2 \\ \left(\dfrac{0.5\delta u^0}{\gamma_2}\right)^2 \end{bmatrix}. \end{gathered}$$