LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK FRT010

Tentamen 15 januari 2016 kl 14-19

Poängberäkning och betygsättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK. Tidpunkt och lokal för visning meddelas via kurshemsidan.

Lycka till!

1. Skriv om systemet $2\ddot{y} + 4\dot{y} + 2y = u$ på formen:

a. Överföringsfunktion (från U till Y) (1 p)

b. Tillståndsform (1 p)

Solution

a. Laplace-transform ger $2s^2Y + 4sY + 2Y = U \iff 2Y(s^2 + 2s + 1) = U \iff$

$$Y = \frac{1/2}{s^2 + 2s + 1} U$$

b. Från formelsamlingen fås systemet på observerbar form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

eller styrbar form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. Betrakta följande system:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

a. Beräkna systemets poler, är systemet stabilt? (1 p)

b. Kan systemet stabiliseras med hjälp av en proportionell regulator? Motivera! (1 p)

c. Kan systemet stabiliseras av en PI-regulator? Motivera! (1 p)

d. Beräkna en tillståndsåterkoppling $u = -Lx + r$ så att det slutna systemet blir stabilt. (2 p)

Solution

a. $C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-2 & -2 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$
$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{(s-2)(s-1)} \begin{bmatrix} s-1 & 2 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{(s-2)(s-1)}.$
Poler i $+1$ och $+2$ så systemet är instabilt.

b. $G_0 = K\frac{2}{s^2-3s+2} \implies G_{cl} = \frac{G_0}{1+G_0} = \frac{2K}{s^2-3s+2+2K}$. Alla poler ligger i vänstra halvplanet om alla koeffecienter i nämnarpolynomet är positiva. Detta går inte att uppnå genom att justera K, så systemet går inte att stabilisera med en P-regulator.

c. Av samma anledning som i b) är detta inte möjligt.

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{K(s+1/T_i)}{s}\frac{2}{s^2-3s+2} \implies \\ G_{cl} &= \frac{G_0}{1+G_0} = \frac{2K(s+1/T_i)}{s^3-3s^2+2s+2Ks+2/T_i} = \frac{2K(s+1/T_i)}{s^3-3s^2+s(2+2K)+2/T_i} \end{aligned}$$

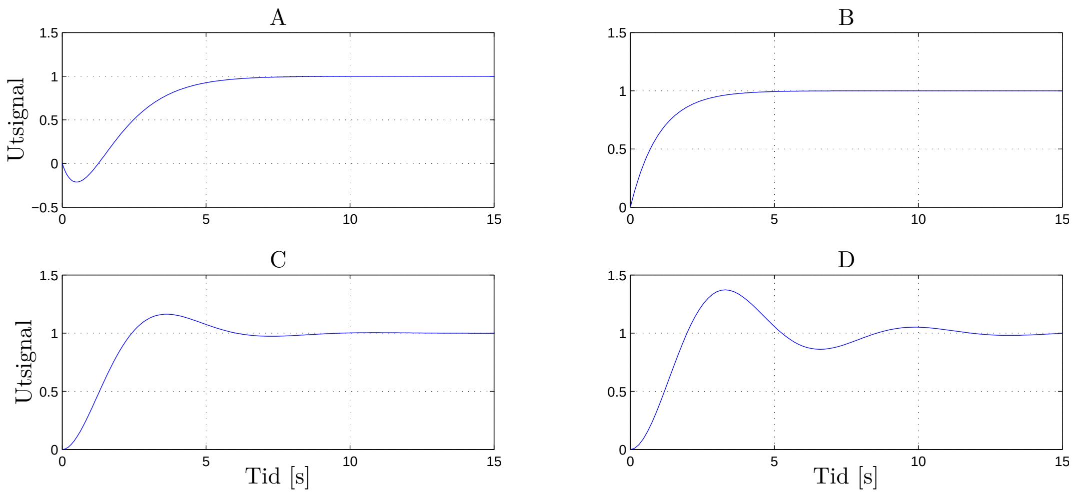
d. Det slutna systemet G_{yr} ges av

$$\begin{aligned} A-BL &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -l_1 & 1-l_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ (sI-(A-BL))^{-1} &= \begin{bmatrix} s-2 & -2 \\ l_1 & s-1+l_2 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \frac{1}{s^2+s(-3+l_2)+2(1-l_2+l_1)} \begin{bmatrix} s-1+l_2 & 2 \\ -l_1 & s-2 \end{bmatrix} \\ G_{yr} = C(sI-(A-BL))^{-1}B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} (sI-(A-BL))^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{s^2+s(-3+l_2)+2(1-l_2+l_1)} \end{aligned}$$

alla poler ligger i vänsta halvplanet om $-3+l_2>0$ samt $1-l_2+l_1>0$. T.ex. $l_1=l_2=4$.

3. I Figur 1 visas fyra olika stegsvar A-D, där ett enhetssteg skickas in till systemet vid tidpunkten 0 s. Para ihop varje stegsvar med någon av överföringsfunktionerna 1-6, och motivera varför. Det finns endast en överföringsfunktion per stegsvar. (2 p)

$$G_1(s) = \frac{-s+1}{(s+1)^2} \qquad G_2(s) = \frac{1}{s+2}$$
$$G_3(s) = \frac{1}{s+1} \qquad G_4(s) = \frac{1}{s^2+0.6s+1}$$
$$G_5(s) = \frac{1}{s^2+0.6s+1}e^{-s} \qquad G_6(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$$



Figur 1 Stegsvar A-D i uppgift 3

Solution

Eftersom ingen av stegsvaren uppvisar någon dötid kan vi direkt utesluta G_5. Samtliga stegsvar visar en statisk förstärkning 1, vilket gör att vi också kan utesluta G_2, som har en statisk förstärkning på $\frac{1}{2}$.

Stegsvaret i A uppvisar inledningsvis ett omvänt svar på insignalen, vilket tyder på nollställen i höger halvplan. Den enda överföringsfunktion som uppfyller detta är G_1

Stegsvaret i B är ett typiskt stegsvar för en första ordningens process, där vi inte ser någon tendens till oscillation. Vi ser också att vi har en initialderivata hos utsignalen som är skild från noll. Eftersom den enda återstående överföringsfunktionen av första ordningen är G_3, så måste den motsvara B.

Kvar är de båda stegsvaren C och D, samt överföringsfunktionerna G_4 och G_6. Båda stegsvaren är alltså andra ordningen processer, och för att identifiera dem jämför vi nämnarpolynomen i G_4 och G_6 med andragradspolynomet $s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$ och identifierar parametrarna ω och ζ. För G_4 får vi:

$$\omega = 1$$
$$\zeta = 0.3$$

För G_6 får vi:

$$\omega = 1$$
$$\zeta = 0.5$$

Båda systemen är alltså lika snabba, men skiljer sig i dämpning. Eftersom G_6 är mer dämpad än G_4 måste G_6 motsvara C och G_4 motsvara D. Sammanfattningsvis:

$$
\begin{aligned}
A &= G_1 \\
B &= G_3 \\
C &= G_6 \\
D &= G_4
\end{aligned}
$$

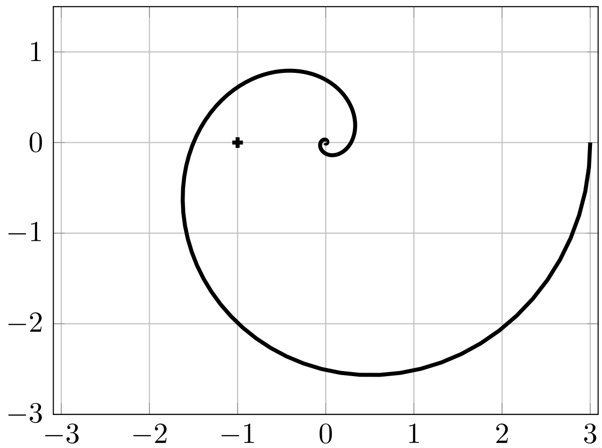
4. I Figur 2 visas Nyquist-diagrammet för ett tredje ordningens system med en tidsfördröjning.

a. Innehåller systemet (minst) en integrator? (1 p)

b. Vi vill återkoppla detta system med en regulator med överföringfunktionen

$$G_R(s) = K.$$

För vilka värden på K är det återkopplade systemet stabilt? (1 p)



Figur 2 Nyquist-diagram till uppgift 4.

Solution

a. Nej, det innehåller inga integratorer. En integrator ger oändlig statisk förstärkning. Detta system har statiska förstärkningen 3.

b. Öppna systemet har förstärkning 1.5 vid den frekvens ω_0 där fasvridningen är $-180°$. För att det återkopplade systemet ska vara stabilt krävs därför att $K < \frac{1}{1.5}$.

5. I Figur 3 visas Bode-diagrammet för processen $G_P(s)$:

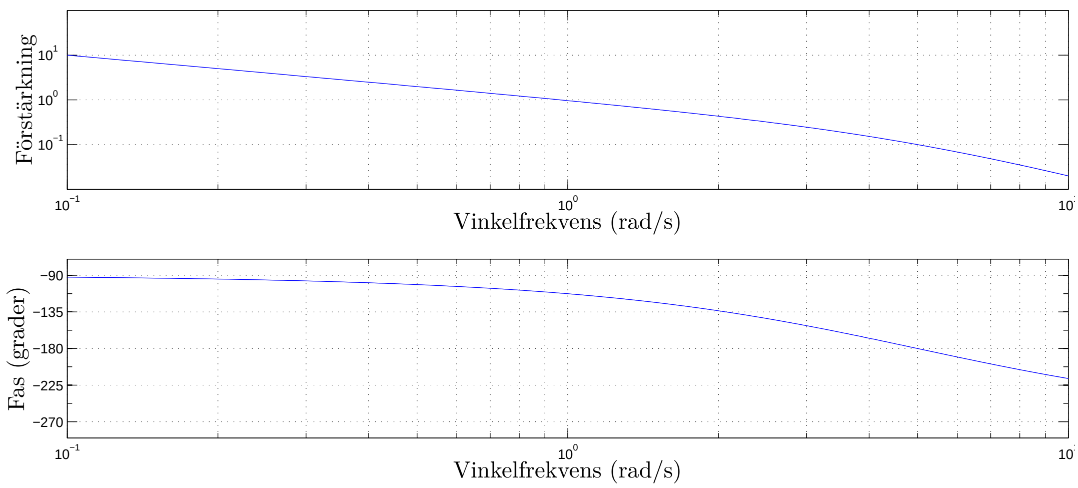
$$G_P(s) = \frac{1}{s(0.2s+1)^2}$$

a. Antag att man väljer att reglera processen med en P-regulator med förstärkningen $K = 1$. Bestäm fas- och amplitudmarginal för det reglerade systemet. (1 p)

b. Hur lång dödtid kan det reglerade systemet hantera innan det blir instabilt? (1 p)

c. Använd Ziegler-Nichols frekvensmetod för att designa en P-regulator till processen $G_P(s)$. (1 p)

d. Man beslutar sig för att använda P-regulatorn i deluppgift **c**. Vad blir det stationära felet för det slutna systemet vid en börvärdesändring i form av ett enhetssteg? Motivera! (1 p)



Figur 3 Bodediagrammet för G_P i uppgift 5.

Solution

a. Systemets kretsöverföringsfunktion är $G_0(s) = G_P(s) \cdot 1 = G_P(s)$ och vi kan alltså direkt avläsa fas- och amplitudmarginal ur Figur 3. Där ser man att kretsöverföringsfunktionen har fasen $-180°$ vid $\omega_0 = 5$ rad/s. Eftersom $|G_0(5i)| = |G_P(5i)| = 0.1$ har det slutna systemet en amplitudmarginal $A_m = \frac{1}{|G(5i)|} = 10$. Skärfrekvensen för systemet är $\omega_c \approx 1$ rad/s (0.964). Vi har att $arg(G_0(1i)) = arg(G_P(1i)) \approx -112.5°$ (markeringen precis mellan -90 och -135 i fasdiagrammet), vilket ger en fasmarginal $\phi_m = 180° - 112.5° = 67.5°$.

b. Systemets dödtidsmarginal ges av:

$$\frac{\phi_m}{\omega_c} = \frac{\pi \cdot 67.5}{180 \cdot 1} \approx 1.2s$$

c. Processen reglerad med en P-regulator med förstärkning 1 har amplitudmarginalen 10 enligt **a**. Detta innebär att återkoppling med en P-regulator med förstärkning 10 kommer att ge upphov till ett slutet system som självsvänger. I Ziegler-Nichols frekvensmetod är alltså (med formelsamlingens beteckningar) $K_0 = 10$. Ziegler-Nichols frekvensmetod ger då rekommendationen $K = 0.5K_0 = 5$.

d. Man kan utan några beräkningar avgöra att det återkopplade systemet kommer att kunna hantera stegändringar i börvärde utan stationära fel genom att konstatera att:

1. Kretsöverföringsfunktionen har inga poler i höger halvplan, och polen i origo är unik. Detta gör att vi kan använda Nyquistkriteriet, som i detta fall säger att det slutna systemet kommer att vara stabilt. Detta eftersom P-regulatorn motsvarar en ren förstärkning som är mindre än amplitudmarginalen som beräknades i **a**.
2. Kretsöverföringsfunktionen innehåller en integrator.

Dessa två punkter är tillräckligt för att konstatera att det stationära felet vid stegändringar i börvärdet är 0.

Man kan naturligtvis även visa det med beräkningar. Vi bildar det slutna systemets överföringsfunktion:

$$G_{cl}(s) = \frac{\frac{5}{s(0.2s+1)^2}}{1 + \frac{5}{s(0.2s+1)^2}} = \frac{125}{s^3 + 10s^2 + 25s + 125}$$

Vi kan se att systemet är stabilt genom att se att nämnarpolynomets koefficienter är positiva och att $10 \cdot 25 = 250 > 125$. Vi kan alltså undersöka det stationära felet med slutvärdesteoremet:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} e(t) &= \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s(R(s) - G_{cl}R(s)) = [\, R(s) = \tfrac{1}{s}\,] = \\ &= \lim_{s\to 0} 1 - G_{cl}(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s^3 + 10s^2 + 25s}{s^3 + 10s^2 + 25s + 125} = 0\end{aligned}$$

Beräkningarna bekräftar alltså att stationära felet är 0.

6. Betrakta blockschemat i Figur 4, där G_{R1} och G_{R2} ska designas för att reglera temperaturen i ett hus. Överföringsfunktionen från temperatur i elementet till lufttemperatur i huset är:

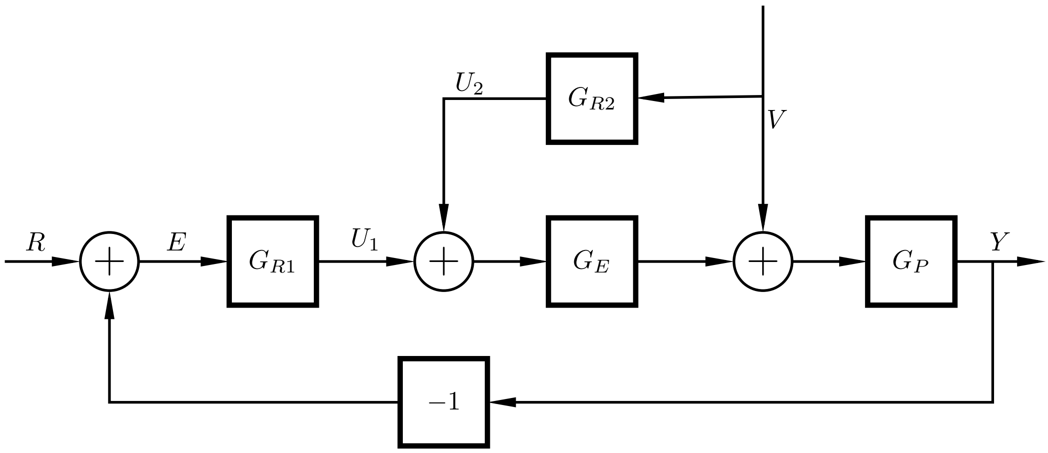
$$G_P(s) = \frac{1}{s3600 + 1}$$

Överföringsfunktionen från styrsignal in till elementet till temperatur i elementet är:

$$G_E(s) = \frac{1}{s1800 + 1}$$

Signalerna i blockschemat är följande:

- Y: Lufttemperaturen i huset
- V: Temperaturen utomhus
- R: Börvärde för lufttemperaturen i huset
- E: Reglerfelet
- U_1: Styrsignal till elementet från G_{R1}
- U_2: Styrsignal till elementet från G_{R2}



Figur 4 Blockschema för reglering av inhomhustemperatur i uppgift 6.

a. Betrakta utomhustemperaturen som en mätbar störning vid regleringen av husets temperatur. Vad kallas regulatorstrukturen som visas i Figur 4? (1 p)

b. Antag att $G_{R2} = 0$ och designa en PI-regulator för G_{R1} så att det slutna systemet får det karaktäristiska polynomet $(s + \omega)^3$. Vad blir ω, K och T_i? (2 p)

c. Hur ska G_{R2} väljas för att eliminera inverkan av utomhustemperaturen på temperaturen inne i huset? Är denna regulator realiserbar? Motivera! (2 p)

Solution

a. Regulatorstrukturen är ett exempel på framkoppling, där man utnyttjar att störningen är mätbar för att förebygga dess effekt i utsignalen.

b. Med $G_{R2} = 0$ fås kretsöverföringsfunktionen från R till Y:

$$G_0 = G_{R1} G_E G_P = K(1 + \frac{1}{sT_i}) \frac{1}{(s3600+1)(s1800+1)} = \frac{K(sT_i+1)}{sT_i(s3600+1)(s1800+1)}$$

Det slutna systemets överföringsfunktion från R till Y blir då:

$$G_{cl} = \frac{G_0}{1+G_0} = \frac{\frac{K(sT_i+1)}{T_i \cdot 3600 \cdot 1800}}{s^3 + s^2(\frac{1}{3600} + \frac{1}{1800}) + s\frac{K+1}{1800 \cdot 3600} + \frac{K}{T_i \cdot 3600 \cdot 1800}}$$

Det karaktäristiska polynomet vi vill jämföra med ges av:

$$(s+\omega)^3 = s^3 + 3s^2\omega + 3s\omega^2 + \omega^3$$

Jämförelse av koefficienter ger:

$$\omega = \frac{1}{3600}$$
$$K = 3\omega^2 \cdot 3600 \cdot 1800 - 1 = \frac{1}{2}$$
$$T_i = \frac{K}{3600 \cdot 1800 \cdot \omega^3} = 3600$$

c. Signalen som kommer in till G_P är:

$$V + G_E(U_1 + U_2) = V + G_E U_1 + G_E G_{R2} V = G_E U_1 + (1 + G_E G_{R2}) V$$

Vi ser att för att helt eliminera utomhustemperaturens inverkan måste vi välja:

$$G_{R2} = -\frac{1}{G_E} = -(s1800+1)$$

Detta är den ideala framkopplingen, vilken innebär en derivering av den uppmätta störningssignalen. Högfrekvent brus i störningssignalen kommer att förstärkas, och för att denna regulator ska vara praktiskt realiserbar så får man stryka derivatatermen eller så får man införa ett lågpassfilter.

7. Ett generellt system (utan direktterm) från u till y ges på tillståndsform av:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

En PI-regulator ges av överföringsfunktionen

$$G_c(s) = K\left(1 + \frac{1}{s\,T_i}\right)$$

och får som insignal reglerfelet $e(t) = r(t) - y(t)$. Skriv det slutna systemet (från $r(t)$ till $y(t)$) på tillståndsform.

Ledning: Skriv först regulatorn på tillståndsform genom att införa tillståndet $x_i(t) = \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau$.

(3 p)

Solution

Först behöver vi hitta en representation av regulatorn på tillståndsform. Då $G_c(s) = \frac{K\,s+K/T_i}{s}$ är ett första ordningens system ansätter vi tillståndsbeskrivningen

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= a\,x_c(t) + b\,e(t) \\ u(t) &= c\,x_c(t) + d\,e(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Med hjälp av formeln för att gå från tillståndsform till överföringsfunktion i formelsamlingen får vi att regulatorns överföringsfunktion ska matchas mot

$$G_c(s) = \frac{d\,s + c\,b - d\,a}{s - a}.$$

Vi ser direkt att $a = 0$ och $d = K$. Vi väljer sedan c och b för att få $c\,b = K/T_i$, exempelvis $c = K$ och $b = 1/T_i$. Detta ger oss systemet

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= \qquad \frac{1}{T_i}\,e(t) \\ u(t) &= K\,x_c(t) + K\,e(t). \end{aligned}$$

Vi kombinerar sedan tillståndsbeskrivningarna för att få det återkopplade systemet

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - B\,K\,C & B\,K \\ -\frac{1}{T_i}\,C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B\,K \\ \frac{1}{T_i} \end{bmatrix} r(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

8. Bodediagrammet för överföringsfunktionen från utomhustemperatur till inomhustemperatur i Fredriks luftkonditionerade lägenhet under sommaren visas i Figur 5. Varje dag i juli månad varierade utomhustemperaturen som en sinusvåg från 20 °C på natten till 30 °C på dagen. I slutet av månaden är transienterna från den lite kallare månaden juni försumbara. Hur varmt var det som varmast i Fredriks lägenhet den 31:e juli? (2 p)

Solution

Insignalen till systemet (utomhustemperaturen) är $u(t) = 25 + 5\sin(\omega t)$, där $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ där periodtiden är

$$T = 1 \text{ dag} = 24 \text{ timmar} = 86400 \text{ sekunder},$$

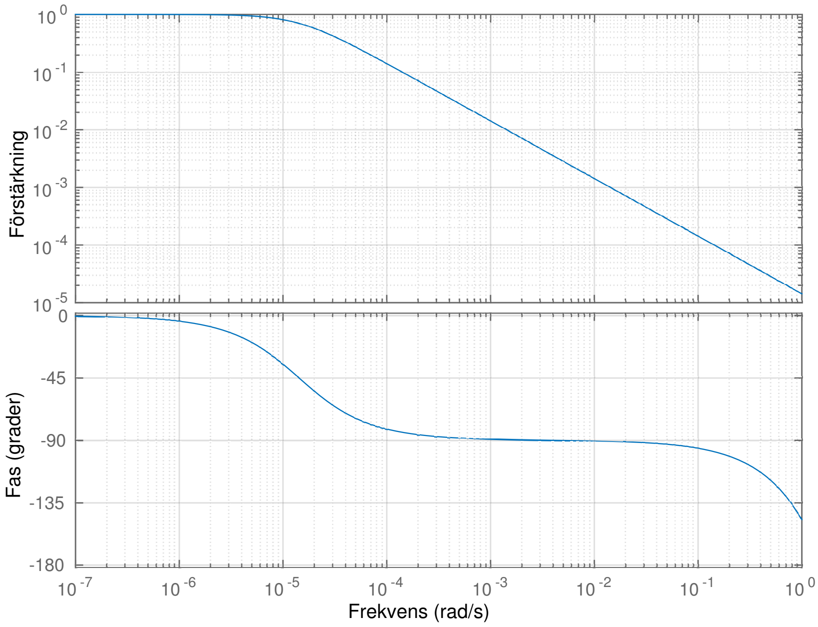
vilket ger oss en vinkelfrekvens på $\omega = \frac{2\pi}{86400} \approx 7 \cdot 10^{-5}$ rad/s.

Eftersom transienterna har dött ut den 31:e juli så blir utsignalen (inomhustemperaturen)

$$y(t) = 25G(0) + 5|G(i\omega)|\sin(\omega t + \arg G(i\omega)),$$

vars högsta värde är

$$25G(0) + 5|G(i\omega)| = 25 + 5 \cdot 0.2 = 26 \text{ °C}.$$



Figur 5 Bodediagrammet i uppgift 8.