LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 16 mars 2016 kl 8–13

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK och bör vara tillgängligt senast tisdagen den 31 mars. Tid för visning meddelas på kursens hemsida.

1. Betrakta systemet $Y(s) = G(s)U(s)$ där

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 1}$$

a. Beräkna systemets poler och nollställen. Är systemet stabilt? (1.5 p)

b. Finn en differentialekvation som relaterar $u(t)$ och $y(t)$. (0.5 p)

c. Vad blir utsignalen $y(t)$ om $u(t)$ är en stegfunktion (systemet är i vila då $t = 0$)? (1 p)

Solution

a. Poler: -1 (dubbel). Nollställe: 0. Systemet är (as.) stabilt ty polerna ligger i VHPL.

b.

$$y'' + 2y' + y = u'$$

c. Utsignalen ges av $Y(s) = \dfrac{s}{(s+1)^2}\dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{(s+1)^2}$. Inverse Laplace transformering ger (tabell) $y(t) = te^{-t}$) då $t \geq 0$.

2. Bodediagrammet för ett öppet stabilt system ges av Figur 1. Ange om följande påståenden är sanna eller falska. Motivera ditt svar. (3 p)

a. Processens statiska förstärkning är 10^{-3}.

b. Processen innehåller en integrator .

c. Processen har en pol och ett nollställe.

d. Processen innehåller en tidsfördröjning.

e. Med en P-regulator $u = -y$ kommer slutna systemet bli stabilt.

f. Med en P-regulator $u = -100y$ kommer slutna systemet bli stabilt.

Solution

a. Falskt. Bodediagrammet visar att statisk förstärkning är 0.01.

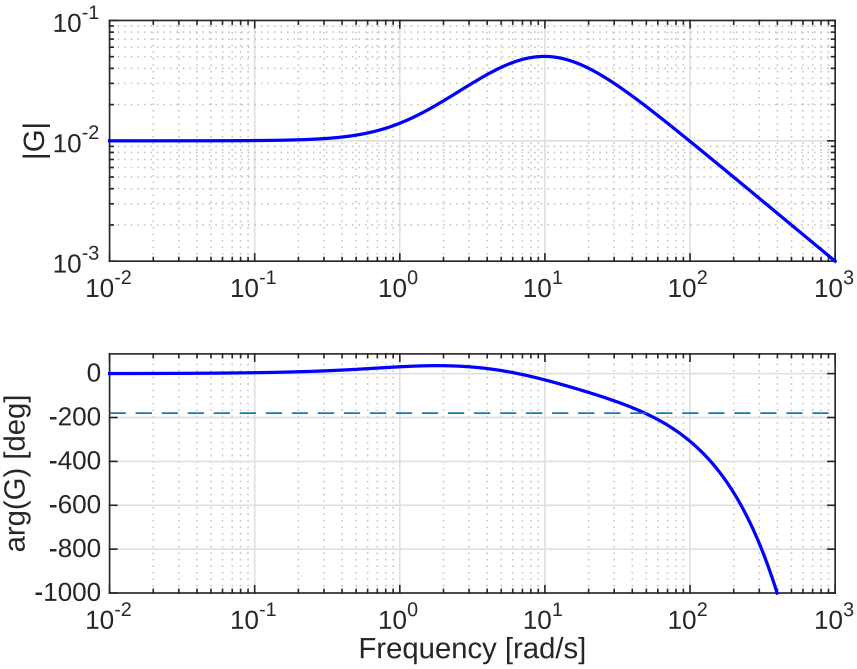
b. Falskt. Eftersom förstärkning vid låga frekvenser inte går mot oändligheten ser vi att systemet saknar integrator.

c. Falskt. Systemet har ett nollställe och två poler.

d. Sant. Eftersom fasen går mot minus oändligheten för höga frekvenser ser vi att systemet har en tidsfördröjning.

e. Sant. Kretsförstärkningen är alltid mindre än 1 och Nykvistkurvan kan därför aldrig omsluta -1. Från det förenklade Nykvistkriteriet följer att den slutna loopen blir stabil.

f. Falskt. Vi kommer med denna förstärkning få en skärfrekvens på $\omega_c = 100$ och fasen är där under -180 grader, vilket alltså ger en negativ fasmarginal.



Figur 1 Bodediagram för problem 2

3. Ange sant eller falskt för påståendena i **a-d** och motivera varför. Poäng ges endast till svar med korrekt motivering. (2 p)

a. Vid de frekvenser där känslighetsfunktionens belopp är större än 1 kommer Nyquistkurvan för det öppna systemet att befinna sig på ett avstånd mindre än 1 från punkten -1.

b. En fasretarderande länk ger ett icke-positivt fasbidrag vid alla frekvenser.

c. När processen $\frac{s}{s^2+2s+1}$ återkopplas enkelt med en PI-regulator kommer det inte att uppstå ett stationärt fel när man gör en stegändring i börvärdet.

d. När man designar en P-regulator enligt Ziegler-Nichols frekvensmetod får det resulterande återkopplade systemet alltid en förstärkningsmarginal $A_m = 2$.

Solution

a. Sant. Avståndet från öppna systemets Nyquistkurva till punkten -1 är

$$|1 + G_0(i\omega)| = \frac{1}{|S(i\omega)|}$$

där G_0 är det öppna systemets överföringsfunktion (kretsöverföringsfunktionen) och S är känslighetsfunktionen. Alltså $|S(i\omega)| > 1 \implies |1 + G_0(i\omega)| < 1$.

b. Sant. Argumentet för en fasretarderande länk ges av:

$$arg(M\frac{1+\frac{i\omega}{a}}{1+\frac{i\omega M}{a}}) = arctan(\frac{\omega}{a}) - arctan(\frac{\omega M}{a})$$

Eftersom $\omega \geq 0$, $a > 0$, $M > 1$ och $arctan(x)$ är växande för $x \geq 0$ kommer det innebära att den fasretarderande länken kommer att ha en fas som är mindre än eller lika med noll.

c. Falskt. Nollstället i origo förkortar bort PI-regulatorns integrator. Detta leder till att den resulterande kretsöverföringsfunktionen kommer att sakna integrator. För att det stationära felet ska bli 0 vid stegändring i börvärdet måste kretsöverföringsfunktionen innehålla minst en integrator.

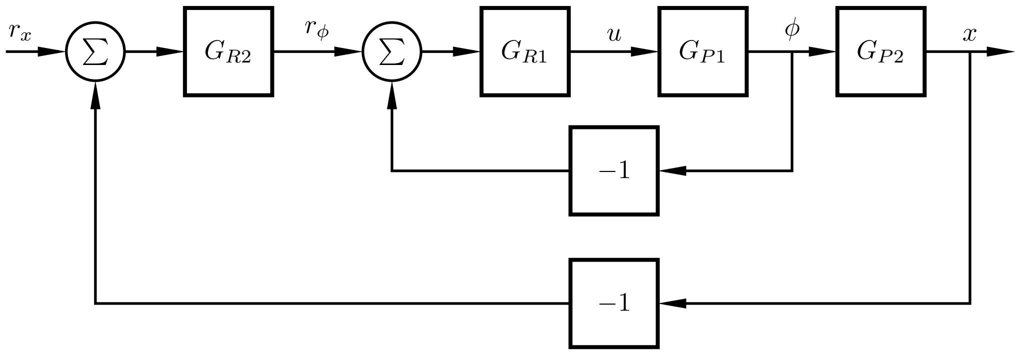
d. Sant. Med Ziegler-Nichols frekvensmetod hittar man först den förstärkning K_0 för P-regulatorn som ger en självsvängande krets, dvs på gränsen till instabilitet. Valet $K = 0.5K_0$ för P-regulatorn ger då en förstärkningsmarginal $A_m = 2$.

4. I processen "Kulan på Bommen" är målet att reglera en kulas position x längs med en bom genom att styra bommens vinkelhastighet med hjälp av en spänningssignal u. Man har tillgång till mätsignaler för kulans position x och bommens vinkel ϕ från horisontalplanet. För att lösa problemet har man valt strukturen på sin reglerdesign enligt Figur 2 nedan.

En linjär approximation av processen ges av överföringsfunktionerna

$$G_{P1} = \frac{5}{s}, \qquad G_{P2} = \frac{10}{s^2}$$

Överföringsfunktionerna G_{R1} och G_{R2} återstår att bestämmas.



Figur 2 Reglerstrukturen som används i uppgift 4.

a. Vilken regulatorstruktur visas i Figur 2? (0.5 p)

b. Beräkna en P-regulator $G_{R1} = K$ som placerar polen för det återkopplade systemet från r_ϕ till ϕ i -10. (1 p)

c. Det reglerade systemet från r_ϕ till ϕ kan approximeras med sin statiska förstärkning så länge som det är betydligt snabbare än regleringen av den yttre loopen. Använd denna approximation och beräkna en PD-regulator $G_{R2} = K(1 + sT_d)$ som placerar polerna för hela det återkopplade systemet i -1. (1.5 p)

d. Efter att ha implementerat designen på den verkliga processen försöker man göra regleringen av bomvinkeln ännu snabbare genom att öka värdet på K i P-regulatorn. Vid stora värden på K börjar dock hela bommen skaka, något som modellen inte kan förklara. Vad kan det bero på? (1 p)

Solution

a. Regulatorstrukturen i Figur 2 är kaskadreglering.

b. Överföringsfunktionen från r_ϕ till ϕ är:

$$G_{r_\phi \to \phi}(s) = \frac{5K}{s + 5K}$$

Med $K = 2$ placeras polen i -10.

c. Approximationen ger:

$$G_{r_\phi \to \phi}(s) \approx G_{r_\phi \to \phi}(0) = 1$$

Med denna approximation kan alltså designen av G_{R2} göras som om den inre loopen inte fanns. Det återkopplade systemet ges då av:

$$G_{r_x \to x}(s) \approx \frac{10K(sT_d + 1)}{s^2 + 10KT_d s + 10K}$$

Jämförelse med det önskade nämnarpolynomet $(s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$ ger:

$$K = 0.1$$
$$T_d = 2$$

d. I den verkliga processen finns det alltid mer eller mindre mätbrus i de mätsignaler man återkopplar från. När man ökar värdet på K gör man därför inte bara regleringen av bommen snabbare, utan man förstärker även mätbruset. Vid tillräckligt hög förstärkning kan effekten av mätbrus synas i form av att bommen börjar att skaka och vibrera. Andra möjliga förklaringar är omodellerad dynamik såsom tidsfördröjningar eller resonanta mekaniska moder.

5. Ett systems dynamik ges av följande olinjära differentialekvation

$$\ddot{z} + \frac{2\dot{z}}{(1+z^2)^2} - z = \sqrt{u}.$$

där $u \geq 0$ är insignalen och utsignalen ges av $y = z^2 + u^2$.

a. Inför tillstånden $x_1 = z$ och $x_2 = \dot{z}$ och skriv systemet på tillståndsform. (1 p)

b. Beräkna alla stationära punkter (x_0, u_0). (1 p)

c. Linjärisera systemet kring den stationära punkt som svarar mot $u_0 = 4$. (2 p)

Solution

a. Införande av tillstånden ger följande tillståndsform

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 && (= f_1(x,u)) \\
\dot{x}_2 &= -\frac{2x_2}{(1+x_1^2)^2} + x_1 + \sqrt{u} && (= f_2(x,u)) \\
y &= x_1^2 + u^2 && (= g(x,u))
\end{aligned} \tag{1}$$

b. Från den första ekvationen i (1) erhålls $x_2^0 = 0$. Insättning av $x_2 = 0$ i den andra tillståndsekvationen följande villkor för stationäritet

$$0 = x_1 + \sqrt{u}. \tag{2}$$

De stationära punkterna ges av $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (-\sqrt{t}, 0, t)$, $t \geq 0$. I stationäritet ges utsignalen således av $y^0 = t + t^2$.

c. $u = 4$ ger den stationära punkten $(x_1^0, x_2^0, u^0, y^0) = (-2, 0, 2, 20)$. De partiella derivatorna är

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 8\frac{x_2 x_1}{(1+x_1^2)^3} + 1, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{-2}{(1+x_1^2)^2}, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial u} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 2x_1, \qquad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial u} = 2u,$$

Inför nya variabler

$$\begin{aligned} \Delta x &= x - x^0 \\ \Delta u &= u - u^0 \\ \Delta y &= y - y^0. \end{aligned} \tag{3}$$

Det linjäriserade systemet ges av

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Delta x &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{25} \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \Delta u \\ \Delta y &= \begin{bmatrix} -4 & 0 \end{bmatrix} \Delta x + 8\Delta u \end{aligned} \tag{4}$$

6. Ett system ges på tillståndsform av (4 p)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

a. Beräkna systemets poler och nollställen.

b. Är systemet styrbart?

c. Introducera tillståndsåterkopplingen $u = -Lx + l_r r$ med $L = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}$. Beräkan slutna systemets poler. Beräkna även l_r så att slutna systemet får statisk förstärkning från r till y lika med 1.

Solution

a. Överföringsfunktionen ges av
$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$
$= \frac{1}{(s+4)(s+3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ 0 & s+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s+5}{(s+4)(s+3)}$
Alltås har systemet ett nollställe i -5 och två poler i -4 and -3.

b. Styrbarhetsmatrisen är

$$W_s = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

vilket är inverterbart, alltså är systemet styrbart.

c. Den givna L-matrisen är $\begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}$ vilket ger $u = -4x_2 + l_r r$. Vi får

$$\begin{aligned}
G_{cl}(s) &= C(sI - (A - BL))^{-1} B l_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+4 & 2 \\ 0 & s+7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} l_r \\
&= \frac{1}{(s+4)(s+7)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+7 & -2 \\ 0 & s+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} l_r \\
&= \frac{s+5}{(s+4)(s+7)} l_r.
\end{aligned}$$

Systemet har alltså två poler, -4 och -7 och ett nollställe -5. Beräkning av stationär förstärkning ger ekvationen $\frac{5}{28} l_r = 1$ varifrån fås $l_r = \frac{28}{5}$.

7. Du vill reglera en process med överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{10}{s^2}$$

så att systemet får skärfrekvens $\omega_c = 10$ rad/s och fasmarginal 30 grader. Designa en lämplig kompenseringslänk som åstadkommer detta. (3 p)

Solution

Vi väljer en fasavancerande länk

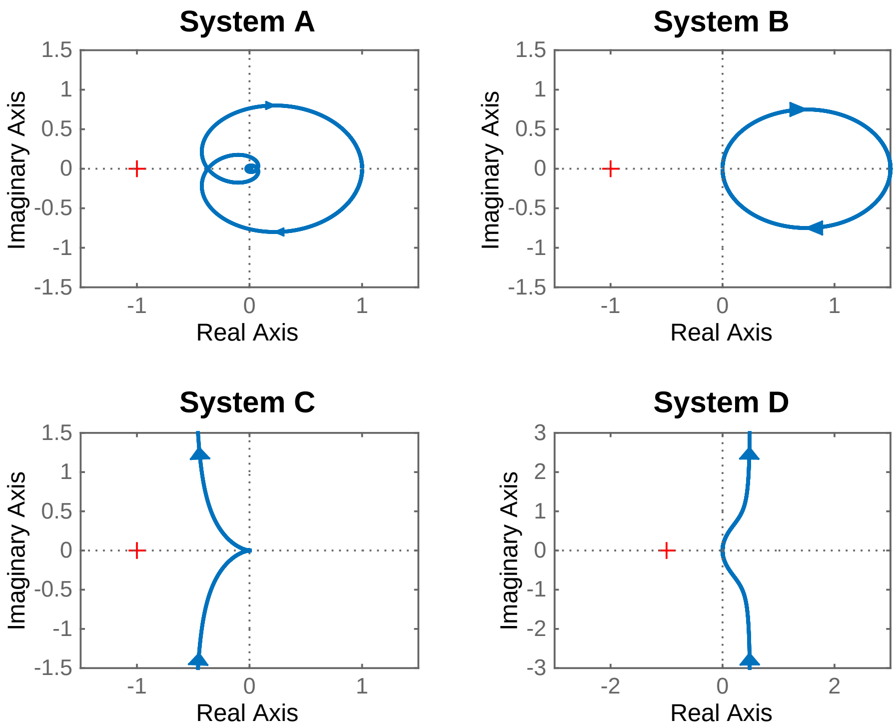
$$G_k(s) = K_k \frac{1 + s/b}{1 + s/(bN)}$$

Eftersom G har fas -180 grader för alla frekvenser måste vi höja fasen med 30 grader. Från figur i formelsamlingen ser vi att detta ger att $N = 3$. För att få mest fasavancering vid ω_c skall vi ha $\omega_c = b\sqrt{N}$, vilket ger $b = 10/\sqrt{3} = 5.77$. Slutligen får vi från villkoret $G(i\omega_c)G_k(i\omega_c)$ att

$$10/10^2 K_k \sqrt{N} = 1$$

vilket ger $K_k = 5.77$. Regulatorn blir

$$G_k(s) = 5.77 \frac{1 + s/5.77}{1 + s/17.3} = \frac{100s + 577}{5.77s + 100}$$



Figur 3 Nyquist diagram A-D i problem 8. Nyquistkurvorna är ritade för både positiva och negativa frekvenser.

8. Nyquistdiagrammen A-D för fyra olika system visas i Figur 3. Systemen beskrivs av de fyra överföringsfunktionerna nedan. Para ihop diagrammen A-D med överföringsfunktionerna 1-4. Motivera svaret. (2 p)

$$G_1(s) = \frac{3}{s+2}, \quad G_2(s) = \frac{2}{s(s+2)}, \quad G_3(s) = \frac{e^{-s}}{(s+1)^2}, \quad G_4(s) = \frac{1+s}{s(1+s/2)}$$

Solution

We immediately recognize the first order system G_1 in diagram B and the system G_3 with time delay is in A. To distinguish between the two other systems, both containing an integrator, one can check that G_2 has phase below -90 degrees and G_4 above -90 degrees (G_4 is an integrator with phase advance compensation). Therefore G_2 is C and G_4 is D. Answer: 1234=BCAD.