LUNDS UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 4 januari 2016 kl 8-13

Poängberäkning och betygsättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK. Tidpunkt och lokal för visning meddelas via kurshemsidan.

Lycka till och god fortsättning!

Lösningar till tentamen i Reglerteknik AK 2016-01-04

1. Skriv om systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

a. som överföringsfunktion (från U till Y) (1 p)

b. som differentialekvation ($\dddot{y} + a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = u$) (1 p)

Solution

a. Laplace ger $Y = X_1,\ sX_1 = X_2,\ sX_2 = -2X_2 + U \Longrightarrow$

$$Y = X_1 = \frac{1}{s} X_2 = \frac{1}{s(s+2)} U.$$

Kan också beräknas genom $C(sI - A)^{-1}B$.

b. Från a) erhålles $s(s+2)Y = U$ vilket efter invers-Laplace ger

$$\ddot{y} + 2\dot{y} = u.$$

2. Ett system är beskrivet av överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{s+4}{s^2 + 3s + 2}.$$

a. Är systemet stabilt? (1 p)

b. Finn en tillståndsbeskrivning av systemet. (1 p)

c. Om systemet regleras med en PI-regulator med $K = 1$ och $T_i = 2$, är det återkopplade systemet stabilt? (2 p)

Solution

a. Överföringsfunktionen kan skrivas om som

$$G(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)}.$$

Eftersom samtliga poler ligger i vänster halvplan så är systemet stabilt.

b. Den styrbara kanoniska formen ges av

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} x(t).\end{aligned}$$

c. Kretsöverföringsfunktionen är

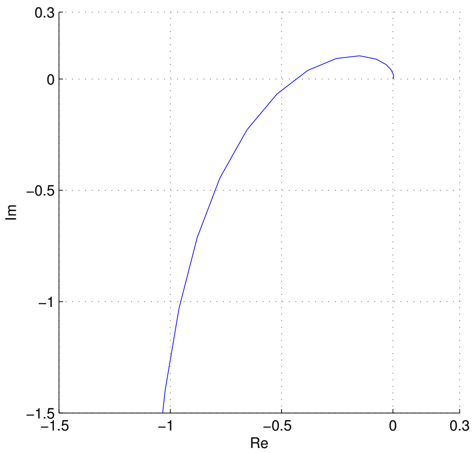
$$G_0(s) = G_R(s)G(s) = \frac{s+0.5}{s}\frac{s+4}{(s+1)(s+2)} = \frac{Q(s)}{P(s)}.$$

Det slutna systemets karaktäristiska polynom ges av

$$Q(s) + P(s) = s^2 + 4.5s + 2 + s^3 + 3s^2 + 2s = s^3 + 4s^2 + 6.5s + 2.$$

Eftersom samtliga koefficienter är positiva och $4 \cdot 6.5 = 26 > 2$, så är det återkopplade systemet stabilt.

3. I figur 1 visas nyquistdiagrammet för ett system. Systemet saknar poler och nollställen i höger halvplan. Bestäm om var och ett av följande påstående är sanna, falska eller om det saknas tillräckligt med infomation för att avgöra. Motivera! (4 p)



Figur 1 Nyquistdiagram i fråga 3. (Imaginärdelen går mot $-\infty$ när ω går mot 0.)

a. Systemet innehåller en integrator.

b. Den statiska förstärkningen är större än 1.

c. Amplitudmarginalen är större än 2 vid enkel återkoppling.

d. Systemet är stabilt utan feedback.

e. Systemet innehåller en fördröjning.

f. Systemet har minst två poler.

g. Om systemet återkopplas med en proportionell regulator med förstärkning 2 så blir det slutna systemet stabilt.

h. Fasmarginalen är större än 70° vid enkel återkoppling.

i. Dötidsmarginalen är större än 1 sekund.

Solution

a. Sant. Amplituden börjar i oändligheten och måste därför ha en pol i 0, dvs en integrator $\frac{1}{s}$.

b. Sant. Systemet har statisk förstärkning som går mot oändligheten.

c. Sant. Förstärknininingen vid $-180°$ är 0.43 dvs amplitidmarginalen är $\frac{1}{0.43} > 2$.

d. Sant. Systemet saknar poler i högra halvplan enligt beskrivningen.

e. Falskt. En fördröjning gör att fasen går mot $-\infty$, detta sker inte i diagrammet.

f. Sant. Fasen i systemet går mot minst $-270°$ så det innehåller minst tre poler.

g. Sant. Förstärkningen vid $-180°$ är 0.43 dvs amplitidmarginalen är $\frac{1}{0.43} > 2$.

h. Falskt. Systemet har ca $45°$ fasmarginal.

i. Saknas information. $L_m = \varphi_{\text{pm}}/\omega_c$ och ω_c går inte att avläsa.

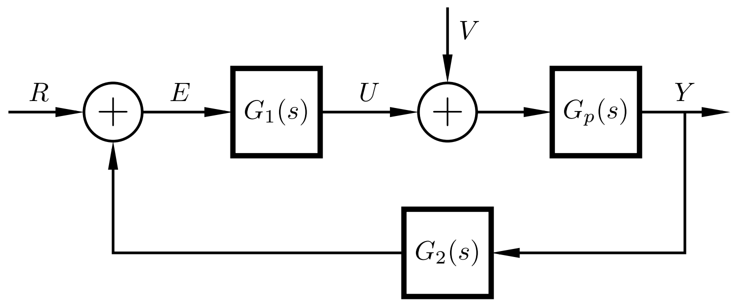
4. Betrakta systemet i figur 2.

a. Beräkna överföringsfunktionen från R till Y (1 p)

b. Låt $G_p(s)$ vara en process som ska regleras. Vilken sorts regulator får vi om vi väljer $G_2(s) = -1$ och $G_1(s) = K(1 + sT)$? (1 p)

c. Beräkna överföringsfunktionen från V till E då regulatorn väljs enligt ovan med $K = 2, T = 1$. (1 p)

d. Bestäm det stationära felet för denna regulator då $R = 0$, V är ett steg, och processen beskrivs av $G_p(s) = \frac{1}{s+1}$ (1 p)



Figur 2 Systemet i fråga 4

Solution

a. Från bilden fås $Y = G_pG_1E$ samt $E = R + G_2Y$ vilket ger $Y(1 - G_pG_1G_2) = G_pG_1R \Longleftrightarrow Y = \frac{G_pG_1}{1-G_pG_1G_2}R$. Överföringsfunktionen är alltså $\frac{G_pG_1}{1-G_pG_1G_2}$.

b. Då fås $U = K(1 + sT)(R - Y)$ vilket är en vanlig PD-regulator.

c. Från bilden fås $E = -Y = -G_p(V+G_1E)$ vilket ger $E(1+G_pG_1) = -G_pV \Longleftrightarrow E = \frac{-G_p}{1+G_pG_1}V = \frac{-G_p}{1+G_1K(1+sT)}V = \frac{-G_p}{1+G_p2(1+s)}V$.

d. $V(s) = 1/s, G_p = \frac{1}{s+1}$ så $E = \frac{-\frac{1}{s+1}}{1+\frac{1}{s+1}2(s+1)}\frac{1}{s} = \frac{-1}{s+1+2(s+1)}\frac{1}{s} = \frac{-1}{3s+3}\frac{1}{s}$. Då polerna till $sE(s)$ ligger i vänstra halvplanet så kan slutvärdesteoremet användas, och det stationära felet blir $\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{-1}{3s+3} = -1/3$.

5. Ett system kan beskrivas på tillståndsformen nedan.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [\,0 \quad 1\,]\, x\end{aligned}$$

a. Är systemet styrbart? Om inte, vilka är de styrbara tillstånden? (1 p)

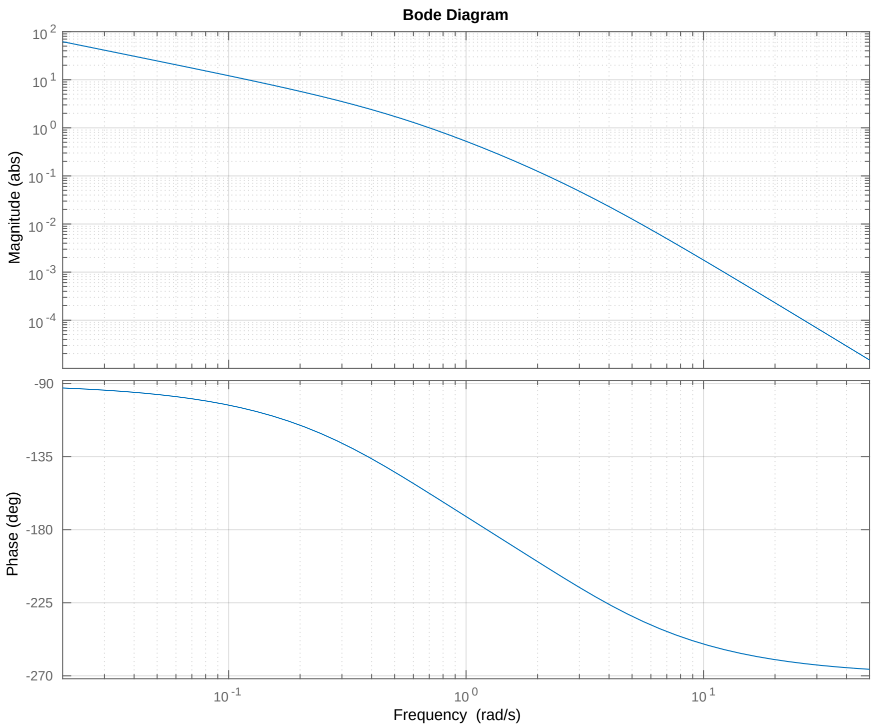
b. Är systemet observerbart? Om inte, vilka är de icke-observerbara tillstånden? (1 p)

Solution

a. $W_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ har full rang så systemet är styrbart.

b. $W_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ har inte full rang så systemet är inte observerbart. De tysta tillstånden ges av $0x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$. De kan alltså skrivas på formen $x = [k\ 0]^T$ för reella k.

6. Bodediagrammet för en kretsöverföringsfunktion visas i Figur 3. Man är nöjd med snabbheten i systemet, men tycker att det svänger lite väl mycket. Designa en kompenseringslänk som ändrar fasmarginalen till cirka 50° utan att förändra skärfrekvensen. (3 p)



Figur 3 Bodediagrammet för kretsöverföringsfunktionen i uppgift 6.

Solution

Skärfrekvensen ω_c avläses till 0.7 och fasmarginalen ϕ_m till (drygt) 20°. Eftersom vi vill höja fasmarginalen så behöver vi en fasavancerande kompenseringslänk. Eftersom vi vill höja fasmarginalen med (knappt) 30° så väljer vi $N = 3$. För att fashöjningen ska komma vid skärfrekvensen så väljer vi

$$b = \frac{\omega_c}{\sqrt{N}} = \frac{0.7}{\sqrt{3}}.$$

För att skärfrekvensen ska förbli oförändrad så ska länken ha förstärkningen 1 vid denna frekvensen, och därför väljer vi

$$K_K = \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Den önskade kompenseringslänken har alltså överföringsfunktionen

$$G_K(s) = K_K N \frac{s+b}{s+bN} = \frac{\sqrt{3}s + 0.7}{s + 0.7\sqrt{3}}.$$

7. Vattenhöjderna x_1 och x_2 i övre respektive nedre vattentanken i laborationsprocessen kan beskrivas på tillståndsformen

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\sqrt{x_1} + u, \\
\dot{x}_2 &= \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}, \\
y &= x_2,
\end{aligned}$$

där u är styrsignalen och y är mätsignalen. Tore har bett Fredrik att designa en regulator för reglering av höjden i nedre tanken så att den håller sig runt $x_2^0 = 0.5$. Fredrik som är förtjust i tillståndsåterkoppling börjar med att linjärisera systemet och sedan placera polerna i $-1+i$ och $-1-i$ med hjälp av en styrlag $u = -Lx + l_r r$. När regulatorn sedan ska testas på processen inser han dock att han bara kan mäta höjden i den nedre tanken. Det behövs alltså ett Kalmanfilter, vilket Fredrik inte är lika förtjust i och ber därför dig om hjälp.

a. Fredrik vill inte dela med sig av sina beräkningar, så du behöver göra din egen linjärisering. Utför detta kring arbetspunkten motsvarandes x_2^0. (2 p)

b. Designa ett Kalmanfilter baserat på det linjäriserade systemet. (3 p)

c. Strax efter att du levererar ditt Kalmanfilter till Fredrik kommer han springandes och är upprörd över att det slutna systemet inte alls beter sig som önskat. Han observerar ett stort stationärt reglerfel, trots att han har sett till att det slutna systemets statiska förstärkning är 1. Fredrik skyller på ditt Kalmanfilter, men Tore menar att det är en brist i tillståndsåterkopplingen som ger upphov till fenomenet när det förekommer laststörningar. Hur kan tillståndsåterkopplingen förbättras för att åtgärda detta? Inga beräkningar erfordras. (1 p)

Solution

a. Arbetspunkten (x_1^0, x_2^0, u^0) ges av

$$
\begin{gathered}
0 = -\sqrt{x_1^0} + u^0, \\
0 = \sqrt{x_1^0} - \sqrt{x_2^0} \\
\Longleftrightarrow \\
x_1^0 = x_2^0 = 0.5, \\
u^0 = 1/\sqrt{2}.
\end{gathered}
$$

Det linjäriserade systemet är

$$
\begin{aligned}
\Delta\dot{x}_1 &= -\frac{1}{2\sqrt{x_1^0}}\Delta x_1 + \Delta u, \\
\Delta\dot{x}_2 &= \frac{1}{2\sqrt{x_1^0}}\Delta x_1 - \frac{1}{2\sqrt{x_2^0}}\Delta x_2, \\
y &= x_2.
\end{aligned}
$$

I linjäriseringspunkten ger detta oss systemmatriserna

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, & D &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

b. För att Kalmanfiltret ska fungera väl tillsammans med Fredriks tillståndsåterkoppling så placerar vi polerna på samma ställe som det slutna systemets fast dubbelt så långt från origo. Vi vill alltså att Kalmanfiltrets karaktäristiska polynom ska vara

$$(s+2-2i)(s+2+2i) = s^2+4s+8. \tag{1}$$

Kalmanfiltrets karaktäristiska polynom ges av

$$\begin{aligned}\det(sI-A+KC) &= \begin{vmatrix} s+\frac{1}{\sqrt{2}} & k_1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & s+\frac{1}{\sqrt{2}}+k_2 \end{vmatrix} \\ &= s^2+(\sqrt{2}+k_2)s+\frac{1+\sqrt{2}(k_1+k_2)}{2}.\end{aligned}$$

Koefficientmatchning med det önskade karaktäristiska polynomet (1) ger oss

$$\begin{aligned}\sqrt{2}+k_2 &= 4,\\ 1+\sqrt{2}(k_1+k_2) &= 16\end{aligned}$$

$$\iff$$

$$\begin{aligned}k_2 &= 4-\sqrt{2},\\ k_1 &= -k_2+\frac{15}{\sqrt{2}} = \frac{17-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Den sökta Kalmanförstärkningen är alltså

$$K \approx \begin{bmatrix} 8.0 \\ 2.6 \end{bmatrix}.$$

c. När det förekommer laststörningar så är det inte tillräckligt att den statiska förstärkningen är 1 för det slutna systemet för att det inte ska uppstå ett stationärt reglerfel. För att motverka laststörningar så krävs det integralverkan i regulatorn. Detta uppnås genom att införa ett extra tillstånd x_i givet av differentialekvationen

$$\dot{x}_i = r - y$$

och sedan lägga till en term $-l_i x_i$ i styrlagen.