1.

a. Poler: -1, -2. Inget nollställe. System är asymptotiskt stabilt.

b.

$$y'' + 3y' + 2y = u$$

c. Utsignalen är $\frac{1}{(s+1)(s+2)}\frac{1}{s}$. Om vi använder invers Laplace transformering får vi med användande av tabell $y(t) = \frac{1}{2}(1 - 2e^{-t} + e^{-2t})$.

2.

a. Introducera

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, u) &= x_1(2 - x_2) - u \\ f_2(x_1, x_2, u) &= -x_2(100 - x_1). \end{aligned}$$

Eftersom $f_1(100, 2, 0) = f_2(100, 2, 0) = 0$ är den givna vektorn en stationär punkt. Vi får

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= 2 - x_2 = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= -x_1 = -100 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= x_2 = 2, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= -100 + x_1 = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial u} &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -100 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} u \tag{1}$$

b. Den karakteristiska ekvationen blir $\det(sI - A) = s^2 + 200 = 0$ vilken har två rötter på imaginära axeln. Systemet är därför inte asymptotiskt stabilt.

c. Eftersom styrbarhetsmatrisen

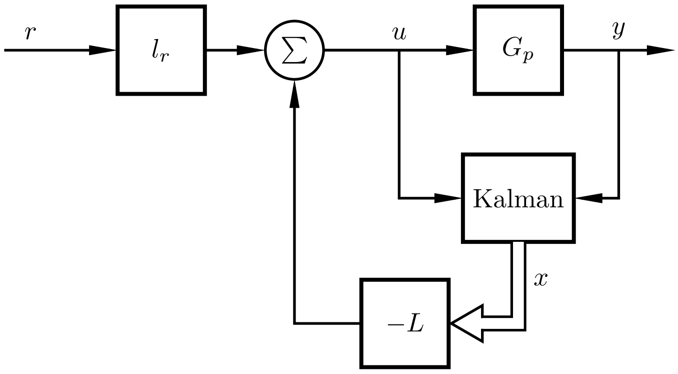
$$W_s = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

är inverterbar så är systemet styrbart.

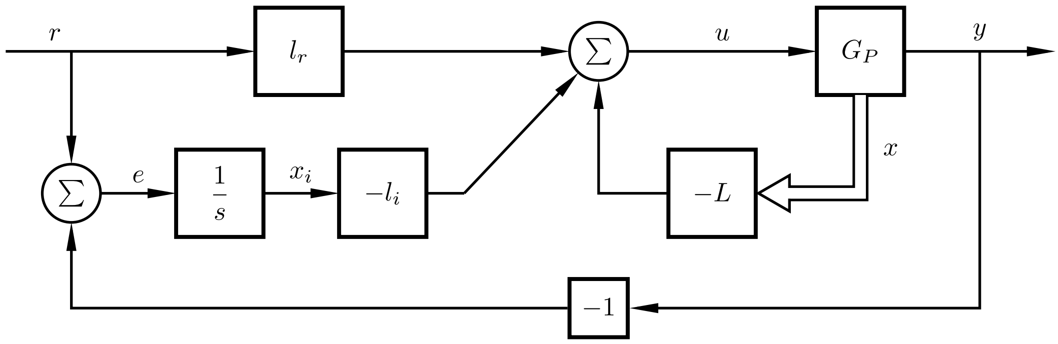
3.

a. Se Figur 1.

b. Se Figur 2.



Figur 1 Blockdiagram för tillståndsåterkoppling med observerare i lösningen till uppgift 3a



Figur 2 Blockdiagram för tillståndsåterkoppling med integralverkan i lösningen till uppgift 3b

4 a. Ifrån figuren bestäms utsignalens periodtid till cirka 1.6, dvs vinkelfrekvensen är $\omega \approx \frac{2\pi}{1.6} \approx 4$, och amplitud $A \approx 1.5$. Fasförskjutningen bestäms via sambandet

$$\begin{aligned} \sin(4 \cdot 14 + \phi) &= -1 \\ 4 \cdot 14 + \phi &= -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Genom att välja $n = 9$, fås

$$\phi = -\frac{\pi}{2} + 9 \cdot 2\pi - 4 \cdot 14 = -58^\circ.$$

Avläsning i Bode-diagrammet vid frekvensen $\omega = 4$, ger fasen $\approx -58^\circ$ och förstärkningen ≈ 0.7. Således är insignalen

$$u(t) = \frac{1.5}{0.7} \sin(4t) \approx 2 \sin(4t).$$

b. Systemet har statisk förstärkning 3, bryter ned en gång vid frekvensen 1, upp en gång vid frekvensen 10 och till sist ned två gånger vid frekvensen 500. Således är systemets överföringsfunktion

$$G(s) = 3 \frac{\frac{s}{10} + 1}{(s+1)\left(\frac{s}{500} + 1\right)^2}.$$

c. Systemet är stabilt enligt uppgiften. Slutvärdesteoremet ger

$$e(t) = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1 + GK} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + G(0)K}.$$

Avläsning ger $G(0) = 3$, så stationära felet blir $e_\infty = \frac{1}{1+3K}$.

5.

a. I Bodediagrammet så ser vi att K_0, d.v.s. processens amplitudmarginal, är

$$K_0 = \frac{1}{|G_P(i\omega_0)|} \approx 1/0.005 = 200,$$

där $\omega_0 \approx 14$. Periodtiden är

$$T_0 = \frac{1}{\frac{\omega_0}{2\pi}} \approx 0.4.$$

(Mer exakta värden är $K_0 \approx 204$ och $T_0 \approx 0.44$.) Detta ger regulatorerna

$$G_{\mathrm{P}} = 0.5K_0 \approx 100, \qquad G_{\mathrm{PI}} = 0.45K_0 \left(1 + \frac{1.2}{sT_0}\right) \approx 90 \left(1 + \frac{3}{s}\right).$$

Observera att svaret kan kontrolleras med hjälp av Bode-diagrammen i uppgift b.

b. Eftersom processen är asymptotisk stabil och PI-regulatorn har endast en pol som ligger i origo, så har båda de öppna systemen inga poler i höger halvplan och inga multipla poler på imaginära axeln. Vi kan alltså använda Nyquistkriteriet, som säger att det slutna systemet med P-regulatorn är stabilt (amplitudmarginalen är 2 av konstruktion) och att det slutna systmet med PI-regulatorn är instabilt (amplitudmarginalen är mycket mindre än 1).

c. Vi ser i PI regulatorn ger negativ fasmarginal och ett instabilt slutet system. Även P-regulatorn har en alldeles för liten fasmarginal för att vara väl reglerad. En tumregel är att fasmarginalen skall vara minst 30 grader. (Möjliga förbättringar är att vrida ner förstärkningen och acceptera en lägre skärfrekvens och ett långsammare system, eller att använda en PID regulator som kan ge fasavancering.)

6 a. Vi börjar med att bestämma systemets skärfrevens

$$|G(i\omega_c)| = \frac{4}{\sqrt{\omega_c^2 + 4}} = 1$$
$$\omega_c = \sqrt{12}.$$

b. Vid denna frekvens är fasen

$$\arg G(i\omega_0) = -\arg(i\omega_0 + 2) = -\arctan\left(\frac{\omega_0}{2}\right)$$
$$= -\arctan\left(\frac{\sqrt{12}}{2}\right) = -\arctan\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

Således blir fasmarginalen $\phi_m = \frac{2\pi}{3}$ och dödtidsmarginalen

$$L_m = \frac{\phi_m}{\omega_0} = \frac{2\pi}{3\sqrt{12}} \approx 0.60 \text{ s.}$$

c. För att ha en dödtidsmarginal på 0.75 sekunder, ska vi ha

$$\phi_m = L_m\omega_c = 0.75\sqrt{12} \approx 2.60.$$

Fasmarginalen måste höjas med

$$\Delta\phi_m = 2.60 - \frac{2\pi}{3} \approx 29^\circ,$$

vilket ger $N = 3$. Vidare skall faskurvans topp ligga vid ω_c, vilket ger

$$b = \frac{\omega_c}{\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = 2.$$

Vid denna frekvens skall länkens förstärkning, $K_K\sqrt{N}$, vara ett vilket ger

$$K_K = \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Kompenseringslänken blir således

$$G_r^{ny}(s) = \sqrt{3}\frac{s+2}{s+2\cdot 3} \approx 1.73\frac{s+2}{s+6}.$$

7.

a. Den kallas Otto-Smith regulator och ideen och används för system med tidsfördröjningar av formen $e^{-sL}G(s)$. Förhoppningen är att kunna designa regulatorn så som man hade gjort för processen $G(s)$ dvs som om den saknat tidsfördröjning.

b.

$$\begin{aligned} U &= G_{R0}(R - Y + Y1 - Y2) = G_{R0}(E + \hat{G}_P(e^{-sL} - 1)U) \\ \Rightarrow U &= \frac{G_{R0}}{1 + (1 - e^{-sL})\hat{G}_P G_{R0}} E \end{aligned}$$

Det finns en liknande räkning i övningsuppgift 7.9b.

c.

$$G_R(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1 + (1 - e^{-sL})\frac{1}{s(s+1)}\frac{1}{s}} = \frac{s+1}{s(s+1) + \frac{1 - e^{-sL}}{s}} \to \frac{1}{L}, \quad \text{då } s \to 0.$$

Om $L = 0$ så är $G_R(0) = \infty$, dvs det finns integralverkan, vilket även inses ur figuren eftersom vi då har $G_R(s) = G_{R0}(s)$ som regulator. Om $L > 0$ finns dock faktiskt ingen integralverkan eftersom $G_R(s)$ inte går mot ∞ då $s \to 0$. Detta är något vi observerade i labb 3 i uppgifterna 7.5 och 7.7.