LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
Lunds universitet

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 6 april 2013 kl 8-13

Poängberäkning och betygsättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet anslås senast fredagen den 19/4 på kursens hemsida. Visning samma dag klockan 12.30-13.00 i lab C på första våningen i Maskinhuset.

Lycka till!

Lösningar till tentamen i Reglerteknik AK 20130406

1. Ett system beskrivs av

$$\frac{d^3y}{dt^3} = a\frac{d^2y}{dt^2} - 7\frac{dy}{dt} - y + u + \frac{du}{dt},$$

där a är en konstant.

a. Bestäm systemets överföringsfunktion $G(s)$. (1 p)

b. För vilka värden på a är systemet stabilt? (1 p)

Solution

a. Laplace-transform ger

$$s^3Y(s) = s^2aY(s) - s7Y(s) - Y(s) + U(s) + sU(s),$$

vilket ger

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

med

$$G(s) = \frac{s+1}{s^3 - as^2 + 7s + 1}.$$

b. Överföringsfunktionens karakteristiska polynom ges av

$$s^3 - as^2 + 7s + 1$$

Stabilitetsvillkoren i formelsamlingen ger att systemet är stabilt då $a < 0$ och $-7a > 1$, alltså då $a < -1/7$.

2. Ett system på tillståndsform är givet enligt

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -6 & -2.5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

a. Vilka är systemets poler? (1 p)

b. Vilka är systemets nollställen? (1 p)

Solution

Systemets överföringsfunktion ges av

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = C\left(\frac{1}{s^2 + 6s + 5}\begin{bmatrix} s & -2.5 \\ 2 & s+6 \end{bmatrix}\right)B = \frac{s+3}{(s+5)(s+1)}.$$

a. Systemets poler är $s = -1$ och $s = -5$.

b. Systemets nollställe är $s = -3$.

3. Betrakta systemet

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + u^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - x_2 + 1 \\ y &= x_1^2 + x_2\end{aligned}$$

a. Finn alla stationära punkter (x_1^0, x_2^0, u^0) för systemet ovan, där x_1^0 och x_2^0 är uttryckta som funktioner av insignalen u^0. (1 p)

b. Linjärisera systemet när $u^0 = 1$. (2 p)

c. Visa att det linjäriserade systemet är asymptotiskt stabilt oberoende av linjäriseringspunkt. (1 p)

Solution

För att förenkla uttrycken inför vi $f_1(x_1, x_2, u)$, $f_2(x_1, x_2, u)$ och $g(x_1, x_2, u)$ så att systemet kan skrivas

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u) \\ y &= g(x_1, x_2, u)\end{aligned}$$

a. Vi finner de stationära punkterna genom att sätta $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$. Ekvationen $f_1(x_1, x_2, u)) = 0$ ger då $x_1^0 = (u^0)^2$. Sätter vi in detta i ekvationen $f_2(x_1, x_2, u)) = 0$ får vi $0 = (x_1^0)^2 - x_2^0 + 1$ vilket ger $x_2^0 = (x_1^0)^2 + 1 = (u^0)^4 + 1$. Sammantaget ges de stationära punkterna av

$$(x_1^0, x_2^0, u^0) = \left((u^0)^2, (u^0)^4 + 1, u^0\right)$$

b. För $u^0 = 1$ är den stationära punkten $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (1, 2, 1)$.

Vi inför nya variabler $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_2^0$, $\Delta u = u - u^0$, och $\Delta y = y - y^0$. Det linjäriserade systemet ges då av

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2\end{pmatrix} &= A\begin{pmatrix}\Delta x_1 \\ \Delta x_2\end{pmatrix} + B\Delta u \\ \Delta y &= C\begin{pmatrix}\Delta x_1 \\ \Delta x_2\end{pmatrix} + D\Delta u\end{aligned}$$

där

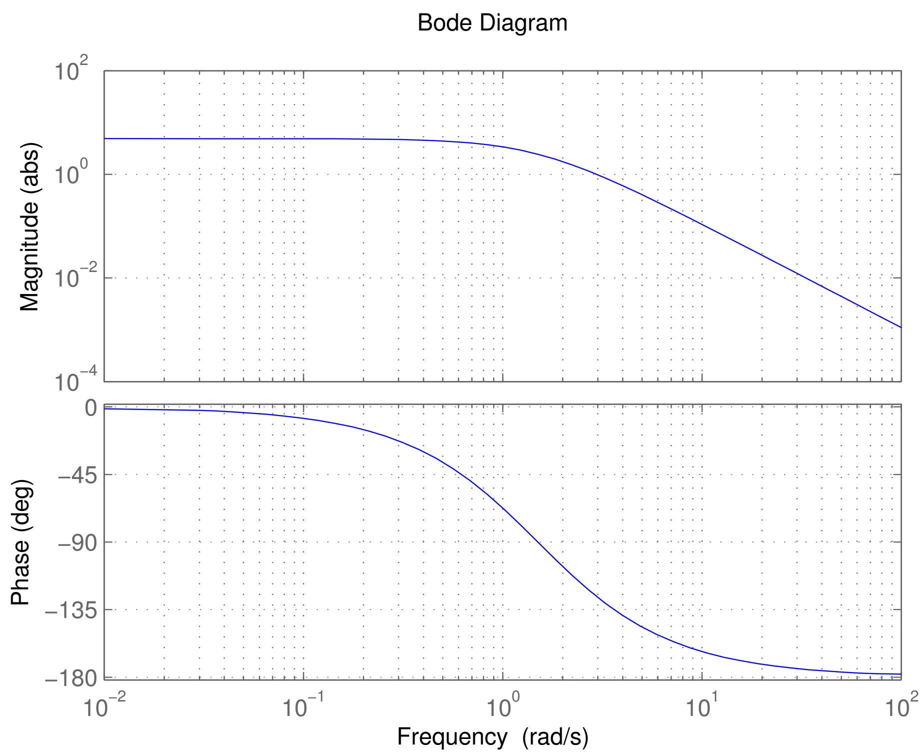
$$\begin{aligned}A &= \left.\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{pmatrix}\right|_{x_1^0, x_2^0, u^0} = \begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 2x_1^0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 2 & -1\end{pmatrix} \\ B &= \left.\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}\end{pmatrix}\right|_{x_1^0, x_2^0, u^0} = \begin{pmatrix}2u^0 \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 \\ 0\end{pmatrix} \\ C &= \left.\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2}\end{pmatrix}\right|_{x_1^0, x_2^0, u^0} = \begin{pmatrix}2x_1^0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix} \\ D &= \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{x_1^0, x_2^0, u^0} = 0\end{aligned}$$

c. Från uppgift (b) har vi

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2x_1^0 & -1 \end{pmatrix}$$

A-matrisens egenvärden är $\{-1, -1\}$ oberoende av värdet på x_1^0, det vill säga alla egenvärden ligger i vänster halvplan och det linjäriserade systemet är asymptotiskt stabilt.

4. Lisa har ett system vars Bodediagram visas i Figur 1.



Figur 1 Bodediagram för Lisas system i uppgift 4.

a. Lisa vill göra systemet snabbare och funderar därför på att koppla in en kompenseringslänk. Ska hon välja en fasavancerande eller en fasretarderande länk? När borde hon istället välja den andra typen av kompenseringslänk? (0.5 p)

b. Lisa skulle vilja ha systemet 10 gånger så snabbt. Vilken skärfrekvens vill hon då ha på sitt nya system? (0.5 p)

c. Lisas kompis Pelle läser i föreläsningsanteckningarna och tycker att det verkar krångligt att designa en kompenseringslänk. Han hävdar att det räcker med att Lisa ökar förstärkningen med en konstant K för att öka snabbheten. Vilket K skulle Lisa behöva ha för att få sin önskade skärfrekvens? (0.5 p)

d. Vad är den stora nackdelen med Pelles sätt att lösa uppgiften? (0.5 p)

Solution

I	$\dot{y} + y = u$
II	$\begin{cases} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 2.25 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & -0.25 \end{bmatrix} x \end{cases}$
III	$\dfrac{4}{s^2 + 0.8s + 4}$

Tabell 1 Processbeskrivningar i problem 5.

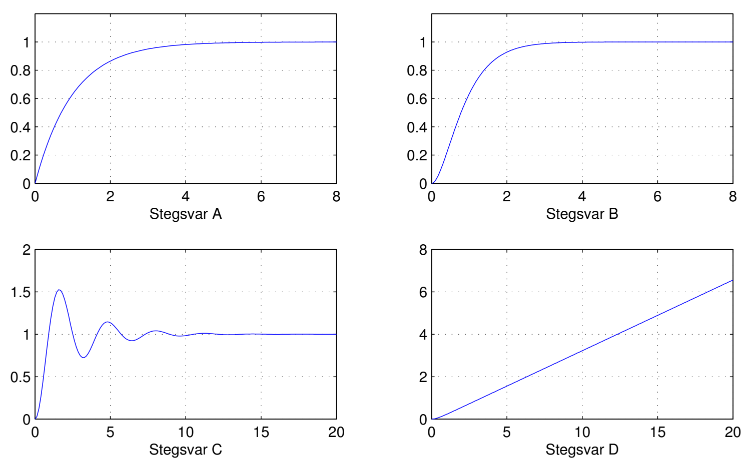
a. Lisa vill ha en fasavancerande länk. Den fasretarderande länken är bra då man vill minska sina stationära fel.

b. $\omega_c^{(ny)} = 30$ rad/s.

c. Förstärkningen vid $\omega = 30$ rad/s är $|G(30i)| \approx 10^{-2}$. För att detta ska bli den nya skärfrekvensen måste Lisa multiplicera med $K = 100$.

d. Nackdelen är att fasmarginalen för systemet minskar från cirka $50°$ till cirka $5°$, vilket ger ett mycket känsligare system.

5. I figur 2 finns fyra stycken stegsvar (A-D) från fyra olika processer. Para ihop dessa med fyra utav de sex olika processbeskrivningarna (I-VI) i tabell 1 (differentialekvation, tillståndsform och överföringsfunktion) och i figur 3 (Bodediagram, singularitetsdiagram och Nyquistdiagram). Motivera dina val. (4 p)



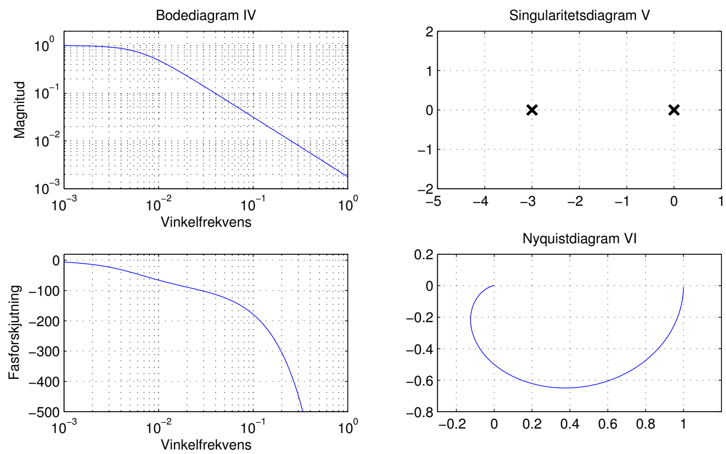
Figur 2 Stegsvar i problem 5.

Solution

System II samt IV kan uteslutas helt. Anledningen är att system II är instabilt (poler: $\pm\sqrt{10}$) och system IV har en tidsfördröjning (fasen $\to -\infty$). Inget av stegsvaren A-D svarar mot sådana system.

Systemet som ger upphov till Stegsvar D har en integrator. Enda alternativet är: D-V.

Återstår system I, III, och VI, samt stegsvar A, B, och C. System I har en reell pol i VHP och inga nollställen. Det ger alltså ett stegsvar utan



Figur 3 Bodediagram (till vänster), samt singularitetsdiagram och Nyquistdiagram (till höger) från problem 5.

översläng och svängningar vilket utesluter att det hör ihop med stegsvar A. Dessutom kan man med begynnelsevärdesteoremet visa att $\dot{y}(0) = 1$ vilket även utesluter B. Enda alternativet är I-A.

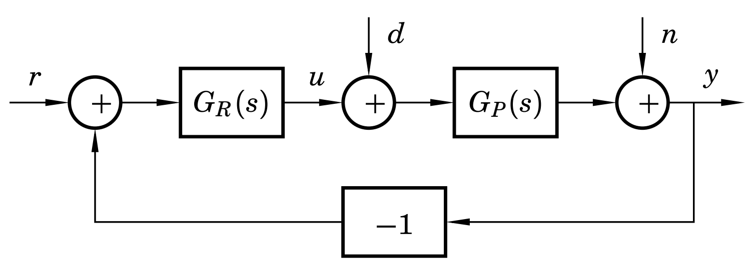
System III är på formen

$$G(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2},$$

med $\zeta = 0.2$. Systemet hör alltså ihop med ett dåligt dämpat stegsvar: III-C.

Från Nyquist-diagrammet kan man utläsa att systemet VI varken har poler eller nollställen i origo, har ett polöverskott på 2 (vilket ger $\dot{y}(0) = 0$, vilket syns i stegsvar B), samt en stationär förstärkning $G(0) = 1$. Alla dessa egenskaper stämmer på B. **Rätt ihopparning är: A-I, B-VI, C-III, D-V**

6. Blockschemat för ett system visas i Figur 4. För att bedöma ett system räcker det oftast inte med att bara titta på överföringsfunktionen från referensvärde till utsignal, utan det finns fler intressanta överföringsfunktioner att ta hänsyn till.



Figur 4 Blockschema för systemet i uppg. **6**.

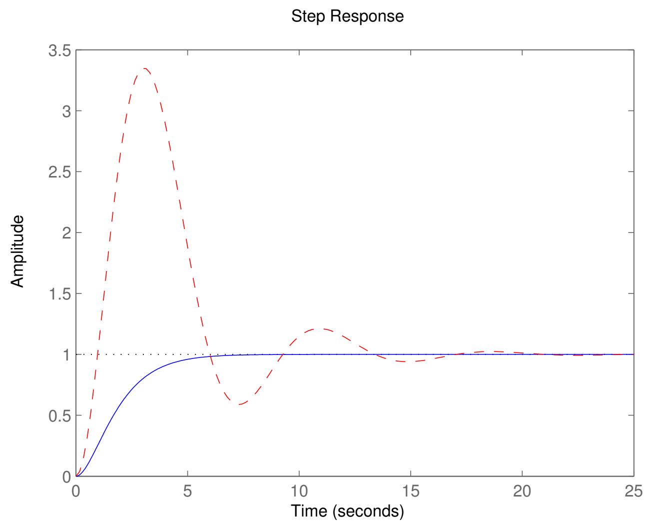
a. Ta fram överföringsfunktionerna från $r \to y$, $d \to y$, $n \to y$ och $r \to u$. (2 p)

b. Processen ges av

$$G_P(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$$

och ska regleras med en PI-regulator. Vilka villkor gäller för K och T_i för att samtliga fyra överföringsfunktioner du tog fram i a) ska vara stabila? (2 p)

c. Utsignalen då referensvärdet är ett steg visas i Figur 5 för två olika parameteruppsättningar på regulatorn. Vilken av parameterinställningarna skulle du rekommendera? Stämmer det med dina tidigare svar? Motivera. (1 p)



Figur 5 Stegsvar på referensvärdesändring. Den streckade linjen visar fallet då regulatorparameterarna är $K = 3$, $T_i = 9$. Den heldragna linjen visar fallet då regulatorparametrarna är $K = 1$, $T_i = -1$.

Solution

a.

$$G_{ry} = \frac{G_P G_R}{1+G_P G_R}, \quad G_{dy} = \frac{G_P}{1+G_P G_R}$$
$$G_{ny} = \frac{1}{1+G_P G_R}, \quad G_{ru} = \frac{G_R}{1+G_P G_R}.$$

b. En PI-regulator har överföringsfunktionen

$$G_R(s) = K + \frac{K}{T_i s} = \frac{K}{s}(s + 1/T_i).$$

Kretsöverföringsfunktionen blir

$$G_0(s) = G_p(s)G_R(s) = \frac{K(s + 1/T_i)}{s^3 + s^2 - 2s} = \frac{Q(s)}{P(s)}.$$

Polerna för det sluta systemet ges av nollställena till

$$1 + G_0(s) = 1 + \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{P(s) + Q(s)}{Q(s)}.$$

Eftersom

$$1 + G_0(s) = 0 \Longleftrightarrow P(s) + Q(s) = 0$$

ges det karakteristiskta polynomet i samtliga fall av

$$P(s) + Q(s) = s^3 + s^2 + (K-2)s + K/T_i$$

Detta ger stabilitetsvillkoren (se Formelsamling)

$$\begin{cases} K & > & 2 \\ K/T_i & > & 0 \\ (K-2) & > & K/T_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K & > & 2 \\ T_i & > & K/(K-2) \end{cases}.$$

c. Regulatorn med $K = 1$, $T_i = -1$ ser mycket bättre ut om man endast tittar på detta stegsvaret. Parametrarna uppfyller dock inte stabilitetskraven från uppgift b) och skulle vi istället valt att titta på svaren från laststörningen d skulle vi se att vi fått ett instabilt system. Anledningen till att stegsvaret från referensvärde ser så bra ut är för att det sker en pol-nollställesförkortning av den instabila processpolen. Ett lämpligare val av regulatorparametrar hade därför varit de som ger upphov till det streckade stegsvaret i figuren. Det uppfyller åtminstone grundkravet att vi för ett stabilt system även om prestandan i detta fallet kanske lämnar mer att önska.

7. En intressant (men topphemlig process!) i en smartphone beskrivs av differentialekvationen

$$\ddot{y} - 3\dot{y} + y = \dot{u} - 5u$$

Man är intresserad av en regulator baserad på tillståndsåterkoppling för att styra y. En konsult som designat tillståndsåterkopplingen har placerat tillståndsåterkopplingens två poler på samma ställe i vänster halvplan, vardera med en brytfrekvens motsvarande 2.5 rad/s. Av praktiska skäl visar det sig att det endast är möjligt att mäta signalen y vilket innebär att ett Kalmanfilter behövs för att skatta tillstånden.

Designa ett lämpligt Kalmanfilter som passar till (den redan färdiga) tillståndåterkopplingen ovan. (3 p)

Solution

Laplacetransform av båda leden i differentialekvationen ger

$$G(s) = \frac{s-5}{s^2 - 3s + 1}.$$

En tillståndsrealisation på observerbar kanonisk form (se formelsamling) ges av

$$\begin{cases} \dot{x} & = & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} u = Ax + Bu \\ y & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x = Cx \end{cases}$$

Ett Kalmanfilter för processen ovan ges av

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

Om vi använder tumregeln som säger att observerarpolerna väljs dubbelt så snabbt som tillståndsåterkopplingens poler får vi att båda polerna placeras i $s = -5$. Det karakteristiska polynomet för Kalman-filtret ges av

$$\det(sI - (A - KC)) = s^2 + (k_1 - 3) * s + k_2 + 1 = s^2 + 10s + 25$$

där vi i sista ledet fört in det önskade karakteristiska polynomet. Identifiering av koefficienterna i polynomen ger

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Anmärkning: Från uppgiften vet vi inte vilken tillståndsform som man använt för själva tillståndsåterkopplingen. Dock kan man från våra estimerade tillstånd hitta en linjärkombination som översätter till andra val av tillståndsform (motsvarande en matrismultiplikation).

8. Ett system med överföringsfunktionen $G_p(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$ återkopplas med en P-regulator. Det finns en tidsfördröjning mellan regulatorn och processen. Tidsfördröjningen varierar mellan 0 och 0.5 sekunder.

a. För vilka värden K på förstärkningen i P-regulatorn är det slutna systemet stabilt när tidsfördröjningen L är 0.5 sekunder? (2 p)

b. Med de möjliga värdena på K från deluppgift a), hur litet kan det stationära felet för ett enhetssteg göras? Du kan bortse från tidsfördröjningen. (1 p)

Solution

a. Vi söker den frekvens för vilken

$$\arg e^{-i0.5\omega} G_p(i\omega) = -\pi,$$

dvs då

$$-0.5\omega - \arctan \omega - \arctan \frac{\omega}{3} = -\pi.$$

Detta kan vi lösa, till exempel, genom att plotta med miniräknaren. Frekvensen blir $\omega_0 \approx 2.5$. Vi har att

$$K \leq \frac{1}{|G_p(i\omega_0)|} \approx 10.5.$$

b. Laplace-transformen av felet vid en stegändring ges av

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_p(s)K} \frac{1}{s}.$$

Eftersom det slutna systemet är asymptotiskt stabilt för $K < 10.5$ har $sE(s)$ alla poler strikt i vänster halvplan. Vi kan därför använda slutvärdesteoremet (räcker ej att bara systemet är stabilt utan måste också beakta vilken insignalen är!)

$$sE(s) = \frac{1}{1 + G_p(s)K} = \frac{(s+1)(s+3)}{(s+1)(s+3) + K}$$

Det ger

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \left.\frac{3}{3+K}\right|_{K=10.5} \approx 0.22.$$