1.

a. Fasmarginalen avläses där Nyquistkurvan skär enhetscirkeln, här i punkten $(0,-1)$. Vinkeln till negativa reella axeln är här 90°, därmed gäller att $\phi_m = 90^\circ$.

b. Nyquistkurvan skär negativa reella axeln i punkten -0.35. Amplitudmarginalen är därmed $A_m = 1/0.35 = 2.9$.

2.

a.

$$G(s) = -\frac{24(s-1)}{(s+2)(s+3)}$$

b. Ja, processen är stabil eftersom båda polerna ligger i vänster halvplan.

c. Två exempel på stabil process:

Vattentankarna med hål i botten som används i laborationerna. Insignal är spänning till en pump som pumpar in vatten. Utsignalen är höjden på vattenpelaren i tanken.

Uppvärmningen av ett rum. Insignal är elementens effekt, utsignal är temperaturen i rummet.

Två exempel på instabil process:

En kula som rullar på en bom. Insignal är bomens lutningsvinkel och utsignal är kulans position på bommen.

En pekpinne som balanseras i handen. Insignal är handens position, utsignal är pinnens vinkel.

3.

a. P-regulatorn har överföringsfunktione $G_R(s) = K$. Det slutna systemets överföringsfunktion blir

$$G_R(s) = \frac{G_P(s)G_R(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)} = \frac{\frac{K}{(s+1)^2}}{1 + \frac{K}{(s+1)^2}} = \frac{K}{s^2 + 2s + 1 + K}$$

Den karakteristiska ekvationen är

$$s^2 + 2s + 1 + K = 0$$

och den önskade karakteristiska ekvationen

$$s^2 + 2 \cdot 0.8\omega s + \omega^2 = 0.$$

Jämför koefficienter:

$$2 = 1.6\omega$$
$$1 + K = \omega^2$$

Genom att lösa ekvationssystemet fås $K = 9/16$, $\omega = 5/4$.

b.
- Eftersom processen inte innehåller någon integrator behövs en integraldel i regulatorn för att ta bort stationära fel vid både referensvärdesändringar och laststörningar.
- Det går inte att fritt välja både dämpning och snabbhet för det slutna systemet. Om man t.ex. har valt $\zeta = 0.8$ för att få bra dämpning är ω givet till $\omega = 5/4$. Önskas ett snabbare slutet systemet måste man antingen acceptera sämre dämpning eller använda en mer avancerad regulator.

4. Det slutna systemets överföringsfunktion från d till y ges av

$$G_{d\to y}(s) = \frac{G_P(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)} = \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{5}{s}} = \frac{1}{s+5}.$$

Laplacetransformen av $d(t)$ är $D(s) = \frac{d_0}{s}$. Beräkna $Y(s)$ som

$$Y(s) = G_{d\to y}(s)D(s) = \frac{1}{s+5}\frac{d_0}{s}.$$

Slutvärdesteoremet kan användas för att beräkna $\lim_{t\to\infty} y(t)$ eftersom $Y(s)$ är stabil,

$$y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sd_0}{s(s+5)} = \frac{d_0}{5}$$

Från figuren läses y_∞ av till $y_\infty = 0.6$. Vi får då $d_0 = 0.6 \cdot 5 = 3$.

5.

a.
- Med PID-regulator behöver endast utsignalen y, d.v.s. spänningen över kondensatorn mätas.
- Med tillståndsåterkoppling utan Kalmanfilter måste båda tillstånden mätas, d.v.s. både spänningen över kondensatorn och strömmen genom resistorn.
- Med tillståndsåterkoppling med Kalmanfilter behöver endast utsignalen y, spänningen över kondensatorn mätas.

b. Processen kan skrivas som

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x\end{aligned}$$

Med $u = -Lx + l_r r$ insatt, fås

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - BL)x + Bl_r r \\ y &= Cx.\end{aligned}$$

Det slutna systemets karakteristiska polynom blir

$$\begin{aligned}\det(sI - A + BL) &= \det\left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= s^2 + s(1 + l_2) + 1 + l_1.\end{aligned}$$

Det önskade karakteristiska polynomet är

$$(s+1+i)(s+1-i) = s^2 + 2s + 2.$$

Jämförelse av koefficienter ger

$$\begin{aligned} 1 + l_2 &= 2 \\ 1 + l_1 &= 2 \end{aligned}$$

vilket ger $L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c. Man vill att statiska förstärkningen i den slutna loopen ska vara $G_{r\to y}(0) = 1$ för att inte få något stationärt fel vid en referensvärdesändring. Den statiska förstärkningen beräknas som

$$\begin{aligned} G_{r\to y}(0) &= C(-A+BL)^{-1}Bl_r \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} l_r = \frac{l_r}{2}. \end{aligned}$$

För att få statisk förstärkning $G_{r\to y}(0) = 1$ ska $l_r = 2$.

6. Den ursprungliga skärfrekvensen är $\omega_c = 0.3$. Den önskade skärfrekvensen blir då $\omega_c^{ny} = 10\omega_c = 3$. Vid ω_c^{ny} avläses fasen för $G_P(i\omega_c^{ny})$ till ca $-170°$ vilket skulle ge en fasmarginal på $180° - 170° = 10°$. Den önskade fasmarginalen är $30°$ vilket gör att fasen måste höjas $\Delta\phi = 30° - 10° = 20°$ vid ω_c^{ny}.

Från formelsamlingen kan utläsas att $N = 2$ i kompenseringslänken höjer fasen med ungefär $20°$. Parametern b kan sedan bestämmas för att få fashöjningen vid ω_c^{ny} enligt

$$b = \frac{\omega_c^{ny}}{\sqrt{N}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2.1.$$

Slutligen kan parametern K_K bestämmas utifrån

$$|G_P(i\omega_c^{ny})||G_K(i\omega_c^{ny})| = 0.063K_K\sqrt{N} = 1$$

vilket ger

$$K_K = 11.$$

Kompenseringslänkens överföringsfunktion ges nu av

$$G_K(s) = 22\frac{s+2.1}{s+4.2}.$$

7. Rotorten visar polernas läge i det slutna systemet när förstärkningen K ändras i intervallet $K \in [0, \infty)$. Det slutna systemet med denna process och regulator ges av

$$G_{CL}(s) = \frac{G_P(s)G_R(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)} = \frac{K(s+10)(1+s/10)}{s^3 + (2 + K/10)s^2 + (1+2K)s + 10K}.$$

För att systemet ska vara stabilt ska det gälla att

$$
\begin{aligned}
2+K/10 &> 0 \\
1+2K &> 0 \\
10K &> 0 \\
(2+K/10)(1+2K) &> 10K
\end{aligned}
$$

Från det första villkoret fås $K > -20$, från det andra $K > -1/2$, från det tredje $K > 0$, och från det fjärde att

$$K^2 - 29.5K + 10 > 0$$

Ekvationen $K^2 - 29.5K + 10 = 0$ har lösningarna $K = 0.343$ och $K = 29.2$, för värden på K i intervallet mellan dessa är villkoret alltså inte uppfyllt.

Sammanfattar man de fyra villkoren för stabilitet för K fås att

$$
\begin{aligned}
0 <&K < 0.343, && \text{stabilt} \\
0.343 <&K < 29.157, && \text{instabilt} \\
29.157 <&K, && \text{stabilt}
\end{aligned}
$$

För låga och höga värden på K är det slutna systemet alltså stabilt medan det finns ett intervall där det är instabilt. I rotorten motsvarar det att polerna rör sig från vänster halvplan i en båge in i höger halvplan för att sedan gå tillbaka till vänster halvplan igen. Detta motsvarar rotort C där man ser en att rotorten i ett kort intervall går in i höger halvplan.

Ett alternativt sätt att lösa uppgiften är att se att nollställena för $G_0(s) = G_P(s)G_R(s)$ är markerade med cirklar i rotorten. $G_0(s)$ har ett dubbelnollställe i $s = -10$ vilket motsvarar rotort C.

8.

a. För $(x_1^0, x_2^0, v^0) = (10^5, \alpha/\beta, 0.1)$ är

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \alpha v - \beta v x_2 = \alpha \cdot 0.1 - \beta \cdot 0.1 \cdot \alpha/\beta = 0 \\
\dot{x}_2 &= \frac{x_2}{x_1}(\alpha v - \beta v x_2) = \frac{\alpha/\beta}{10^5}(\alpha \cdot 0.1 - \beta \cdot 0.1 \cdot \alpha/\beta) = 0,
\end{aligned}
$$

därmed är detta en stationär punkt till systemet.

b. Det olinjära systemet ges av

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \alpha v - \beta v x_2 = f_1(x_1, x_2, v) \\
\frac{dx_2}{dt} &= \frac{x_2}{x_1}(\alpha v - \beta v x_2) = f_2(x_1, x_2, v)
\end{aligned}
$$

Taylorserieutvecklingen av funktionerna $f_i(x_1, x_2, v)$, $i = 1, 2$, upp till första ordningens termer blir

$$
\begin{aligned}
f_i(x_1, x_2, v) =& f_i(x_1^0, x_2^0, v^0) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, v^0)(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0, v^0)(x_2 - x_2^0) \\
&+ \frac{\partial f_i}{\partial v}(x_1^0, x_2^0, v^0)(v - v^0).
\end{aligned}
$$

Beräkna de partiella derivatorna

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\beta v \qquad \frac{\partial f_1}{\partial v} = \alpha - \beta x_2$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{x_2}{x_1^2}(\alpha v - \beta v x_2) \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{1}{x_1}(\alpha v - 2\beta v x_2) \quad \frac{\partial f_2}{\partial v} = \frac{x_2}{x_1}(\alpha - \beta x_2).$$

De partiella derivatorna i den stationära punkten bli

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -0.1\beta \quad \frac{\partial f_1}{\partial v} = 0$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{\alpha}{10^6} \quad \frac{\partial f_2}{\partial v} = 0.$$

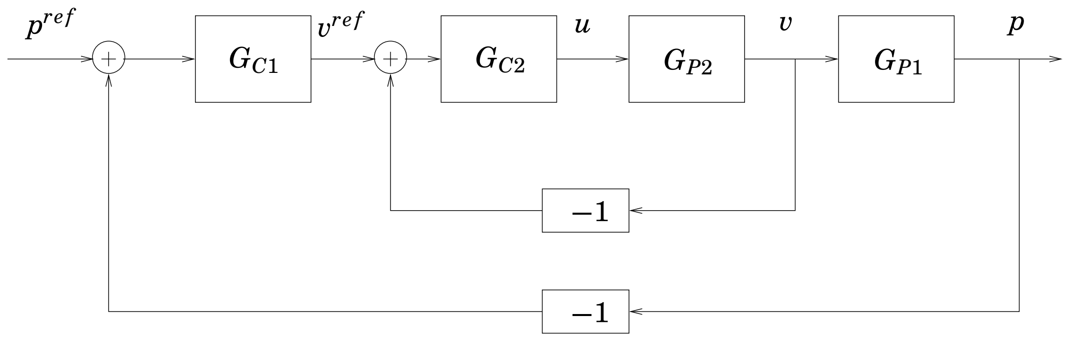
Inför de nya variablerna $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_2^0$, och $\Delta v = v - v^0$. Det gäller nu att

$$\dot{\Delta x}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_1^0 = \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, v) \approx 0 + 0\Delta x_1 - 0.1\beta\Delta x_2 + 0\Delta v$$
$$\dot{\Delta x}_2 = \dot{x}_2 - \dot{x}_2^0 = \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, v) \approx 0\Delta x_1 - \frac{\alpha}{10^6}\Delta x_2 + 0\Delta v$$

Sammanfattningsvis kan det linjäriserade systemet skrivas som

$$\dot{\Delta x}_1 = -0.1\beta\Delta x_2$$
$$\dot{\Delta x}_2 = -\frac{\alpha}{10^6}\Delta x_2$$

c. Se figur 1.



Figur 1

d. Kaskadreglering