Lösningar till tentamen Mars 2011

1.

a. Det slutna systemet ges av $G = \frac{G_p G_r}{1+G_p G_r} = \frac{K}{s+10+K}$. För att systemet ska bli instabilt måste en eller flera poler finnas i höger halvplan, i detta fall måste $10 + K < 0$ vara uppfyllt. Detta är ej möjligt då $K > 0$.

b. Polen hamnar i $s = -10 - K$. Polernas snabbhet ges av avståndet till origo, dvs $\omega = 10 + K$.

c. Höga förstärkningar förstärker inte bara felet, utan även mätbrus. Detta leder till onödigt hög variation i styrsignalen och eventuellt mer slitage i styrutrustning. Det finns också större risk att styrsignalen mättar.

2.

a. Styrbarhetsmatrisen beräknas enligt

$$W_s = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3+a \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

W_s har full rang då dess determinant är skild från 0. Determinanten beräknas enligt (3), och därifrån ges att systemet är styrbart för alla $a \neq 3$.

$$\det W_s = \begin{vmatrix} 1 & 3+a \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 3 - a \tag{3}$$

b. Det slutna systemet ges av (4).

$$\begin{cases} \dot{x} &= (A - BL)x + Bl_r r \\ y &= Cx \end{cases} \tag{4}$$

Polerna för systemet är lika med egenvärdena för matrisen $A - BL$, som erhålles genom att lösa ekvationen (5). Eftersom systemet har två stycken tillstånd och en styrsignal blir $L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix}$. Insättning av detta tillsammans med A och B enligt (2) ger (6).

$$\det(sI - (A - BL)) = 0 \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\det\left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 3 & a \\ 8 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} \right) \right\} = \\ &= \begin{vmatrix} s - 3 + l_1 & -a + l_2 \\ -8 + l_1 & s + 2 + l_2 \end{vmatrix} = \\ &= s^2 + (-1 + l_2 + l_1)s - (6 - (2+a)l_1 - 5l_2 + 8a) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Att samtliga poler hamnar i $s=-2$ innebär att polynomet i s i (6) ska ha samma koefficienter som (7)

$$(s+2)^2 = s^2+4s+4 \tag{7}$$

Identifiering av koefficienter ger ekvationssystemet (8) att lösa.

$$\begin{cases} -1+l_2+l_1 = 4 \\ -(6-(2+a)l_1-5l_2+8a) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = \frac{8a-15}{a-3} \\ l_2 = \frac{-3a}{a-3} \end{cases} \tag{8}$$

För $a=3$ finns ingen lösning.

Det slutna systemets överföringsfunktion från r till y ges av (9). (Utnyttja att vi vet att $\det(sI-A+BL) = s^2+4s+4$)

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI-(A-BL))^{-1}Bl_r = \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-3+l_1 & -a+l_2 \\ -8+l_1 & s+2+l_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} l_r = \\ &= \tfrac{1}{s^2+4s+4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2+l_2 & a-l_2 \\ 8-l_1 & s-3+l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} l_r \\ &= \tfrac{1}{s^2+4s+4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2+a \\ s+5 \end{bmatrix} l_r \\ &= \tfrac{4s+11+3a}{s^2+4s+4} l_r \end{aligned} \tag{9}$$

Den stationära förstärkningen ges av $s=0$ och skall bli lika med 1, vilket ger

$$\frac{11+3a}{4} l_r = 1$$

För $a=-11/3$ finns ingen lösning. Vi får annars

$$l_r = \frac{4}{11+3a} \tag{10}$$

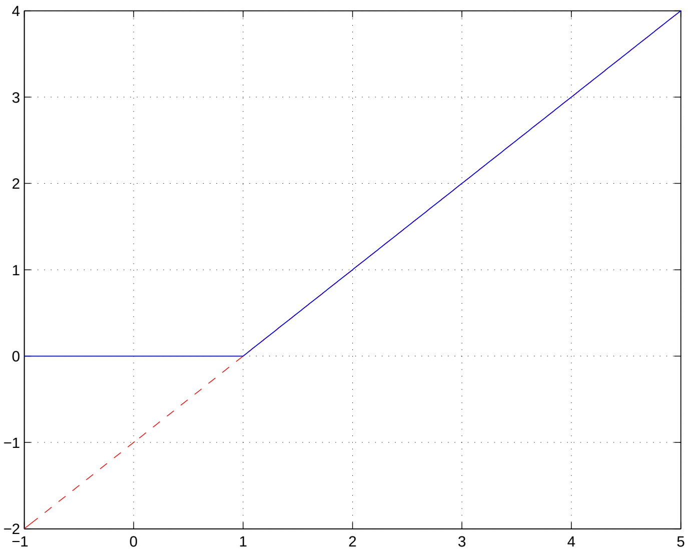
3. Jämviktspunkterna fås genom att sätta derivatan lika med noll, vilket ger $x_0 = \frac{\lambda_0}{\mu_{max}-\lambda_0}$.

Linjäriseringen ges av

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x}{dt} &= -\mu_{max}(1-\frac{\lambda_0}{\mu_{max}})^2 \Delta x + \Delta\lambda \\ \Delta y &= \Delta x \end{aligned}$$

4.

a. Stegsvaret ges av $y(t) = t - 1$ för $t >= 1$ och ges i figur 1. Enligt figur 1 ges P-regulatorn av $K = 1$.



Figur 1 Stegsvaret i uppgift 4

b. Amplitudmarginalen för systemet ges av $A_m = \frac{1}{|G(i\omega_0)|}$, samt fasmarginalen $\phi_m = \pi + arg(G(i\omega_c))$. Med $\omega_0 = 1.57$ rad/s och $\omega_c = 1$ rad/s ges $A_m = 1.57$ och $\phi_m = 32.7°$

5. (A,D,E,H) och (B,C,F,G) hör ihop. Det ena systemet är oscillerande med låg dämpning. Detta ses i figur B där fasmarginal endast är 8.5 grader, i figur C återfinns en resonanstopp vilket tyder på ett oscillativt system, figur F visar ett oscillativt stegsvar samt att figur G har ett polpar med väldigt liten dämpning (stor vinkel från negativa reella axeln). Det andra systemet är långsamt och väldämpat. I figur A visas hög fasmarginal (88 grader), ingen resonanstopp i figur D, ett dämpat och långsamt stegsvar i figur E samt endast reella poler i figur H (hög dämpning). En pol ligger dessutom väldigt nära origo vilket ger ett långsamt system.

6.

a. Falskt - gäller endast om systemet är styrbart.

b. Falskt - derivatadelen är bruskänslig och kan därför försämra prestandan då systemet ger en brusig mätsignal. Godtycklig polplacering för ett första ordningens system kan uppnås mha av en PI-regulator, varför en derivatadel kan tyckas överflödig för sådana system.

c. Falskt - en stor integraldel minskar fasmarginalen och leder till ett svängigt stegsvar.

d. Sant - absolutbeloppen av överföringsfunktionerna är samma (däremot kommer fasen se annorlunda ut).

e. Sant - inversen motsvarar en negativ tidsfördröjning, dvs en regulator som använder framtida värden av signaler, vilket är omöjligt utan tidsmaskin.

f. Sant - låg fasmarginal ger upphov till ett svängigt svar.

7.

a.
- A-2
- B-5
- C-6
- D-1
- E-4
- F-3

Stegsvar A och D har båda stationära fel, och måste således vara styrda av P-regulatorer. Felet är större i D än i A, och därför måste regulator 1 höra ihop med stegsvar D och regulator 2 med stegsvar A (regulator 3 måste ha ännu mindre stationärt fel, då förstärkningen är större). I stegsvar B, C och E är det stationära felet försvunnit (håller i alla fall på att försvinna), och dessa tre måste alltså vara styrda av regulatorer med integraldel. I stegsvar F ser det heller inte ut att vara något stationärt fel, och laststörningen syns knappt heller. Med tanke på de kvarvarande regulatorerna måste F höra ihop med regulator 3, ty övriga regulatorer har så liten proportionell förstärkning att laststörningen måste visa sig, dessutom saknar stegsvaret helt översläng vilket tyder på att det inte finns någon integraldel. Kvar är nu endast PI-regulatorerna, och här hör minskande T_i ihop med att stationära fel försvinner snabbare (övergående i att stegsvaren blir oscillativa). Baserat på detta ser man då att regulator 4 hör ihop med stegsvar E, regulator 5 med stegsvar B och regulator 6 med stegsvar C.

b. Med tanke på den brusiga signalen hade det nog inte varit lämpligt att styra denna process med en PID-regulator (Derivatadelen förstärker bruset, jämför PID-reglering av övre tanken i laboration 1)

8. Använd en fasavancerande kompenseringslänk:

$$G_K(s) = KN\frac{s+b}{s+bN}$$

Beräkna argument och förstärkning för den nya skärfrekvensen $\omega_c = 5$

$$\begin{aligned} arg(G_P(i5)G_R(i5)) &= arctan(5/10) - 180^\circ - arctan(75/675)) \\ &= -159.78 \\ |G_P(i5)G_R(i10)| &= \frac{20\sqrt{125}}{25\sqrt{461250}} \\ &= 0.013 \end{aligned}$$

Parametern N bestämmer hur stor toppen på kompenseringslänkens faskurva är. Den fasökning som behövs vid den önskade skärfrekvensen $\omega_c = 5$ är

$$\begin{aligned} \Delta\phi_m &= \phi_m - (180^\circ + arg(G_P(i5)G_R(i5))) \\ &= 50^\circ - 20.22^\circ \\ &= 29.78 \end{aligned}$$

För $\Delta\phi_m = 29.78$ hittar vi att $N \simeq 3$, och vi ska välja b så att

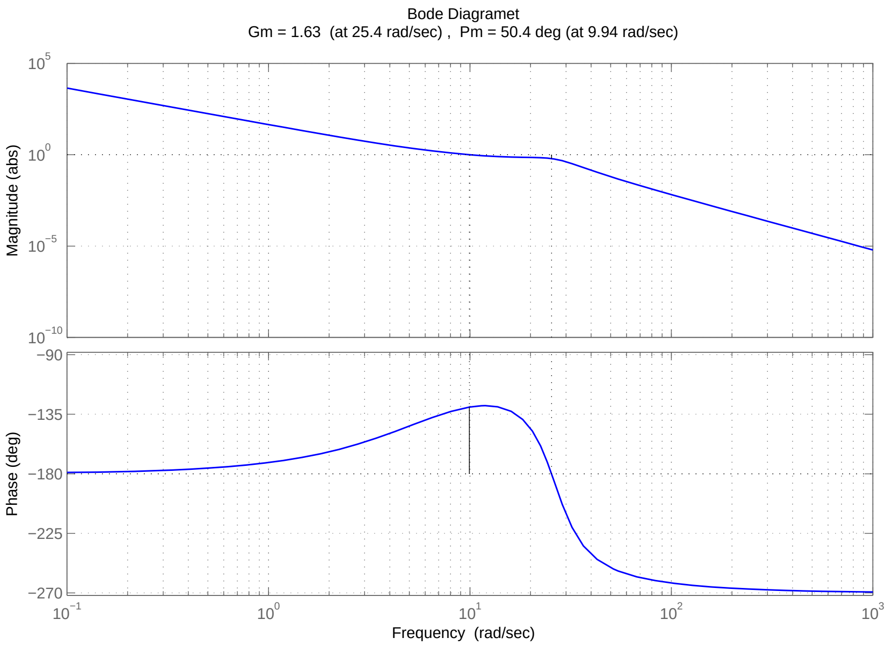
$$b\sqrt{N} = \omega_c$$
$$b = 2.89$$

Det sista steget är att bestämma parametern K_K från

$$K_K\sqrt{N} = \frac{1}{|G_P(i5)G_R(i5)|}$$
$$K_K = 43.74$$

Kompenseringslänken ska vara

$$G_K(s) = 131.2\frac{s+2.89}{s+8.66}$$



Figur 2 Bodediagrammet för det öppna kompenserade systemet

9. Det slutna systemets karakteristiska ekvation ges av
$s^{n+1} + a_{n-1}s^n + (b_{n-1}k + a_{n-2})s^{n-1} + ... + (b_1k + a_0)s + b_0k$
Det är ett nödvändigt (men inte tillräckligt) villkor för stabilitet att alla koefficienter är positiva. För sista koefficienten leder detta till de samtidiga villkoren $b_0 > 0$ samt $-b_0 > 0$ vilket ju ej går att uppnå.