



LUNDS
UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 9 maj 2015 kl 08–13

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng

4: lägst 17 poäng

5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK och är tillgängligt senast 22 maj. Tid för visning meddelas på kursens hemsida.

Lycka till !

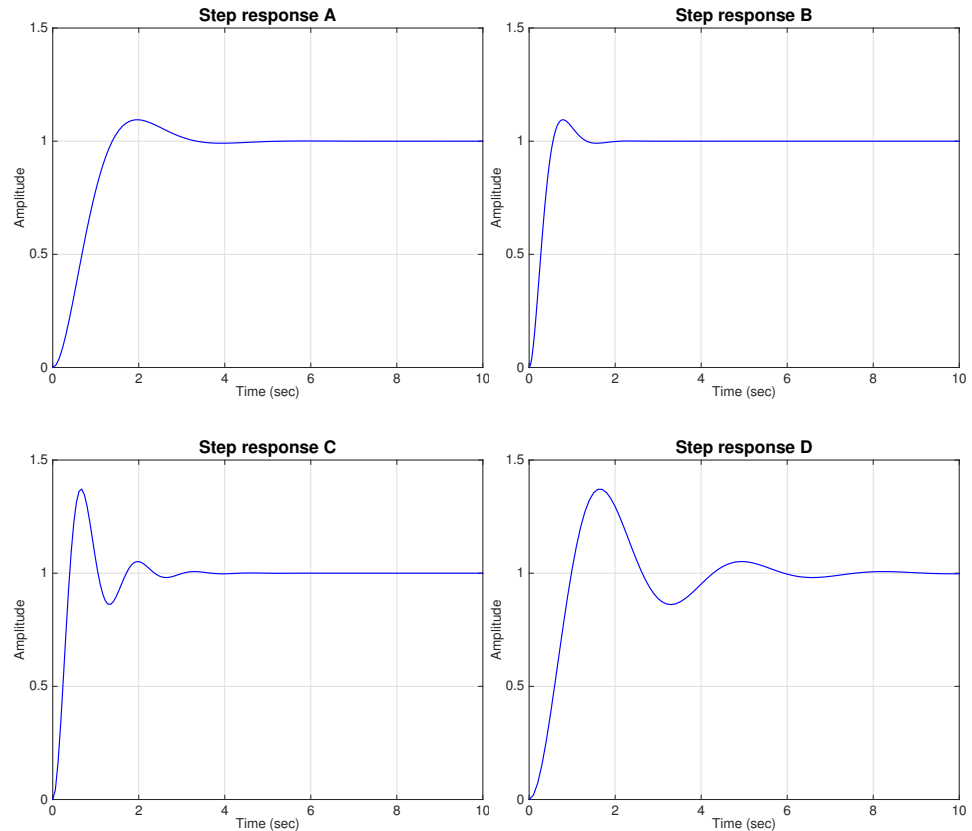
1. Figur 1 visar stegsvar från ett mekaniskt system med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

för följande kombinationer av värden

$$\begin{aligned} (i) \quad \omega_0 = 5, \zeta = 0.6, & \quad (ii) \quad \omega_0 = 5, \zeta = 0.3, \\ (iii) \quad \omega_0 = 2, \zeta = 0.6, & \quad (iv) \quad \omega_0 = 2, \zeta = 0.3 \end{aligned}$$

Kombinera dessa värden med figurerna. Glöm inte motivera svaret. (2 p)



Figur 1: Stegsvär till uppgift 1

Solution

Större ω_0 ger snabbare stegsvar. Större ζ ger bättre dämpning. Alltså är A=(iii), B=(i), C=(ii), D=(iv) (dvs ordning BCAD)

2. Följande modell beskriver dynamiken för en "kavitet", en pryl som används på ESS för skapa ett elektriskt fält som accelererar protoner,

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad \text{där } G(s) = \frac{e^{-sL}}{1 + sT}.$$

- a. Finn en differentialekvation som relaterar $y(t)$ och $u(t)$. (1 p)
- b. Vad blir utsignalen $y(t)$ om $u(t)$ är en stegfunktion (systemet är i vila då $t = 0$)? (1 p)

- c. Bestäm hur lång tid det tar att nå cirka 63 procent av slutvärdet, dvs bestäm T_f med $y(T_f) = 1 - e^{-1}$. Antag $T = 10^{-5}$ sek och $L = 10^{-6}$ sek. (1 p)

Solution

- a. $Ty'(t) + y(t) = u(t-L)$
 b. $y(t) = 1 - e^{-(t-L)/T}$ då $t > L$.
 c. $T_f = T + L = 11 \mu\text{sek}$.

3. En linjäriserad modell av en pendel på en vagn ges av tillståndsekvationerna

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

- a. Beräkna systemets överföringsfunktion, samt poler och nollställen. (2 p)
 b. Beskriver modellen ovan beteendet nära pendelns upprätta position, eller nära positionen då den hänger rakt ner? Motivera svaret. (1 p)
 c. Beräkna en tillståndsåterkoppling $u = -Lx$ som placerar slutna systemets poler i $s = -2$. (2 p)

Solution

- a. $G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2+1}$
 b. Kring positionen rakt ner, polerna ligger på imaginära axeln vilket motsvarar ett system som är marginellt stabilt. (Modellen för pendeln i upprätt läge har en instabil pol med realdel strikt större än noll.)
 c. Om $u = -[l_1 \quad l_2]x$, så är

$$\det(sI - (A - BL)) = s^2 + l_2s + l_1 + 1 = s^2 + 4s + 4 = 0 \Rightarrow l_1 = 3, l_2 = 4$$

4. Ett asymptotiskt stabilt dynamiskt system beskrivs av differentialekvationen

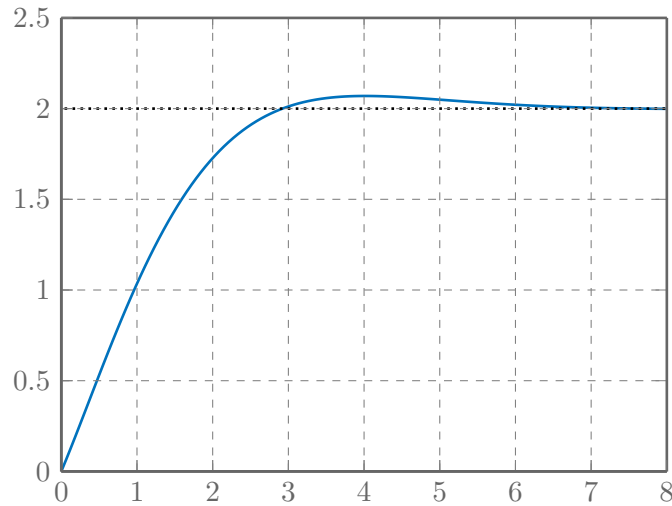
$$\alpha\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \beta u + 2\dot{u},$$

där α och β är parametrar. Systemets stegsvar visas i Figur 2. Avgör med hjälp av stegsvaret värdena på α och β . (Ledtråd: Begynnelse och slutvärdesteoremen). (2 p)

Solution

Eftersom systemet är asymptotiskt stabilt, kan slutvärdesteoremet användas. Systemets utsignal ges av

$$Y(s) = \frac{\overbrace{\beta + 2s}^{G(s)}}{\alpha s^2 + 3s + 2} U(s).$$



Figur 2: Stegsvaret till uppgift 4.

Den statiska förstärkningen blir

$$G(0) = \frac{\beta}{2},$$

vilket efter avläsning av stegsvaret ger att $\beta = 4$. För att bestämma α tittar vi på begynnelsderivatan, vilken fås av

$$y'(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\beta s + 2s^2}{\alpha s^2 + 3s + 2} = \frac{2}{\alpha}.$$

Begynnelsderivatan i stegsvaret avläses till 1, varpå $\alpha = 2$.

5.

- a. Använd Lambda-metoden för att hitta parametrar K, T_i för en PI-regulator $G_R(s) = K(1 + \frac{1}{sT_i})$ för systemet i uppgift 2, dvs

$$G_P(s) = \frac{e^{-sL}}{1 + sT}.$$

Antag $T = 10^{-5}$ sek och $L = 10^{-6}$ sek och välj $\lambda = T$. (1 p)

- b. Beräkna skärfrekvens ω_c och fasmarginal ϕ_m för systemet $G_0(s) = G_P(s)G_R(s)$ då regulatorn ovan används. Är fasmarginalen tillfredsställande? (3 p)

Lambda-metoden ges av $K = \frac{1}{K_p} \frac{T}{L+\lambda}$, $T_i = T$, där K_p är statisk förstärkning för G_p .

Solution

- a. Statisk förstärkning för systemet $G_P(0) = 1$ så vi har $K_p = 1$, vilket ger

$$K = \frac{T}{L + \lambda} = \frac{T}{L + T} = \frac{10}{11}, \quad T_i = T = 10^{-5}.$$

b. Vi får

$$G_0(s) = \frac{Ke^{-sL}}{sT} = \frac{e^{-sL}}{s(L+T)}$$

Skärffrekvensen ω_c ges av $|G_0(i\omega_c)| = 1$ vilket ger

$$1 = \left| \frac{e^{-i\omega_c L}}{i\omega_c(L+T)} \right| \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{L+T} \approx 91000 \text{ rad/s.}$$

För $\omega_c = \frac{1}{L+T}$ har vi $\arg(G(i\omega_c)) = -\frac{\pi}{2} - \frac{L}{L+T}$ vilket ger

$$\phi_m = \pi_2 - \frac{L}{L+T} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{11} = 1.48 \text{ rad} = 85 \text{ grader}$$

(vilket är en rätt stor fasmarginal).

6. Para ihop Bodediagram i Figur 3 med singularitetsdiagrammen i Figur 4. Du kan anta att det bara finns enkla poler och nollställe. Motivera svaret. (3 p)

Solution

(B) och (C) är system med komplex poler med dålig dämpning. Amplitudkurvan har därför en resonanstopp, precis som i (5) och (2). Resonanstoppen i (5) ligger vid $w_0 \approx 1$ och resonanstopp i (2) vid $w_0 \approx 5$. Därför är absolutbeloppet av polerna i (5) större än i (2), vilket ger: (2)-(B) och (5)-(C).

(F) är ett system med två poler och två nollställen. Nollställena ligger närmare origo än polerna. Det betyder fasen börjar vid 90° och därefter ökar. Efter ett tag, vid polernas brytfrekvens, bryter fasen ner mot 0. Därför gäller: (1)-(F).

(3) och (6) har samma förstärkningskurva, men fasen är olika. Polerna och nollställena ligger på samma avstånd från origo för dessa två system. Det betyder de motsvarar (A) och (D). Eftersom (A) har en pol i -1 och ett nollställe i 0 betyder det att fasen för detta system börjar vid 90° och bryter ner vid $w = 1$ mot 0. Därför: (6)-(A). Alltså är (3)-(D). Vilket ger (4)-(E).

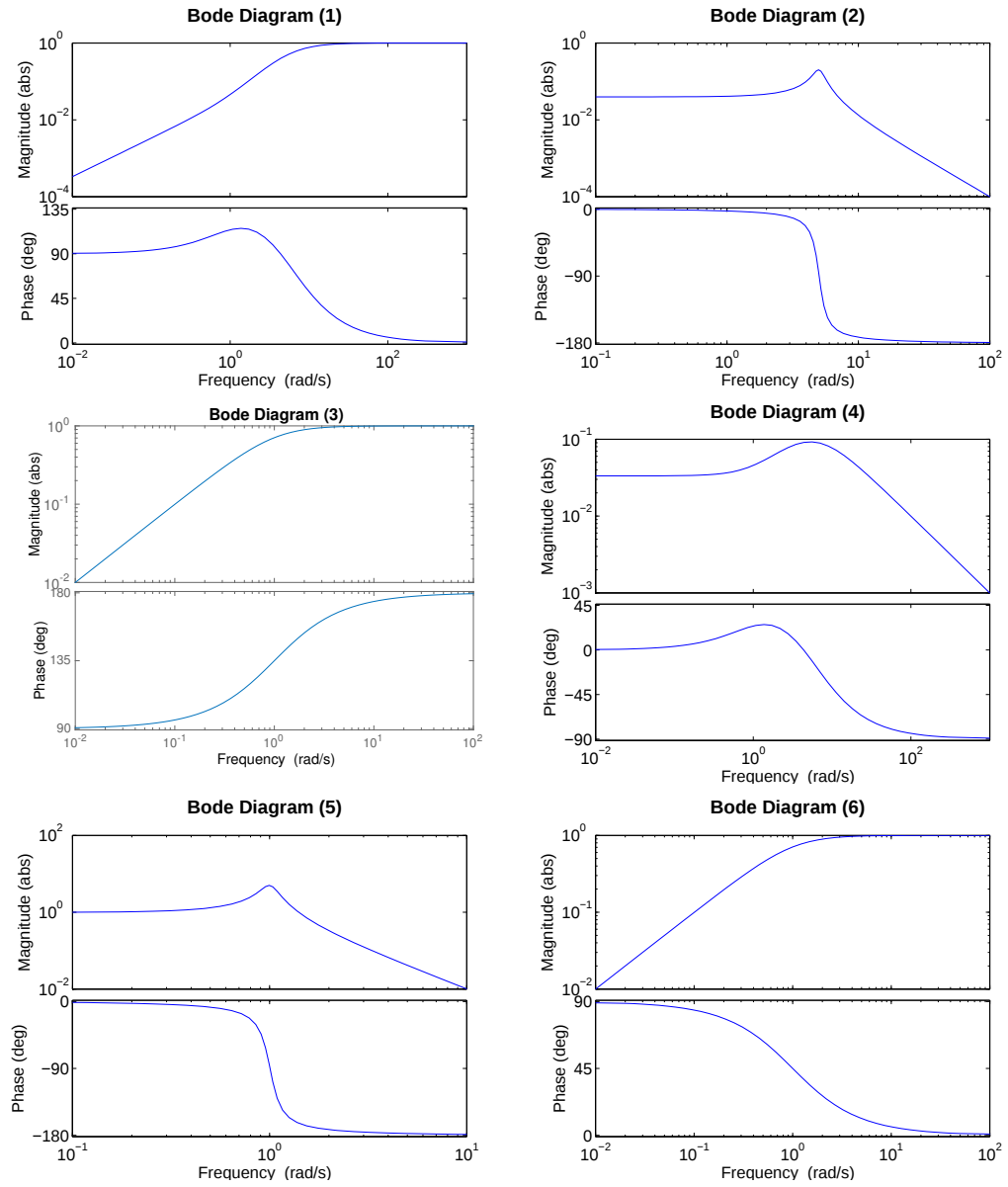
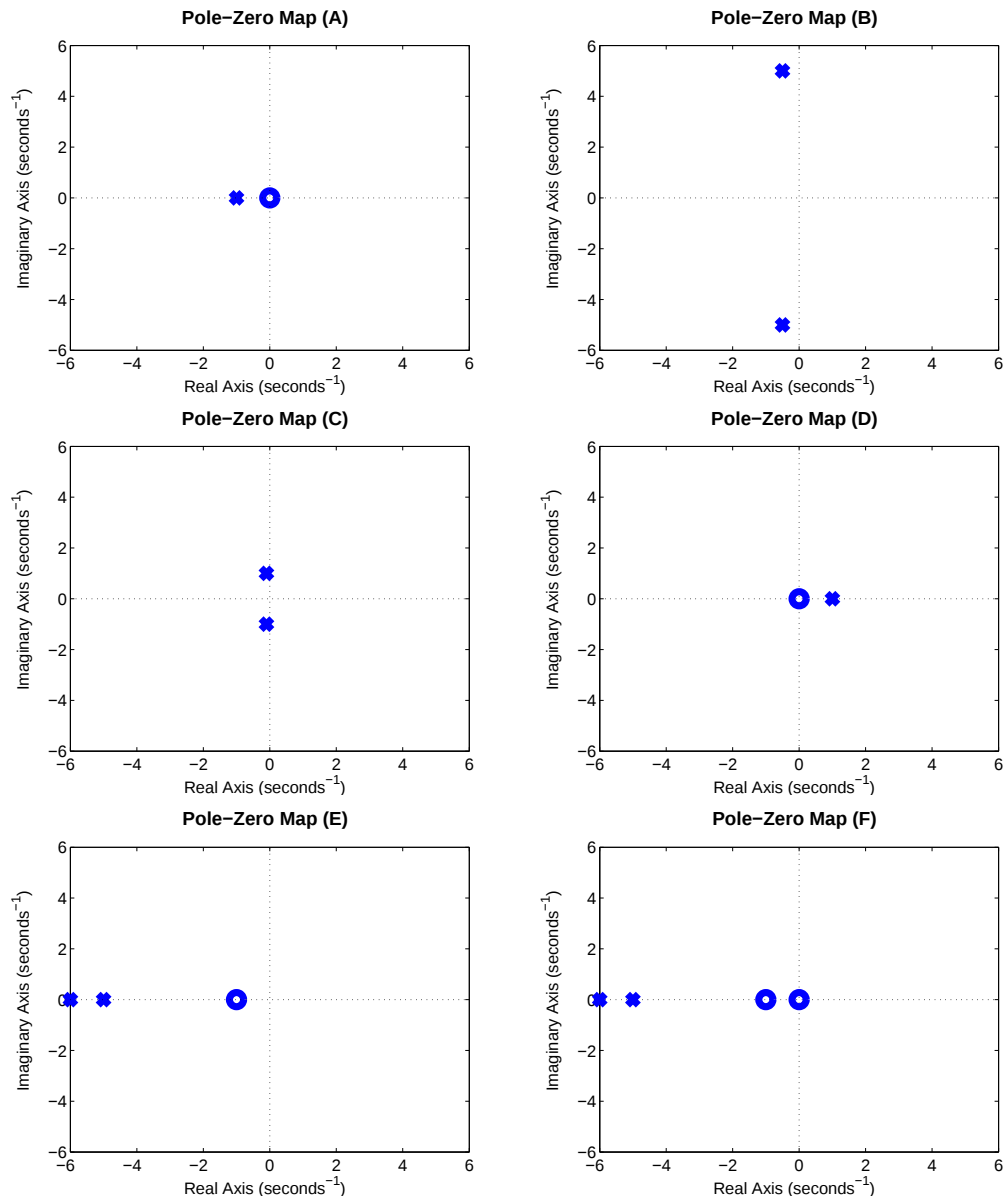
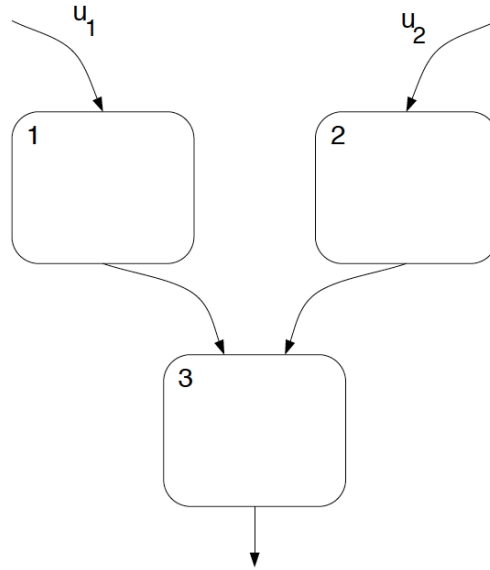


Figure 3: Bode-plots 1-6



Figur 4: Singularitetsdiagram A-F

7. Ett vattensystem består av tre sjöar, vilka förenklat beskrivs enligt figur 5 där pilarna representerar vattenflöden.



Figur 5: Vattensystemet i uppgift 7

Om man låter nivån i sjöarna representeras av tillståndsvariablerna $x_1(t)$, $x_2(t)$ och $x_3(t)$ kan systemet mycket förenklat beskrivas av ekvationerna

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\alpha x_2(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_1(t) + x_2(t) - x_3(t)\end{aligned}$$

där $\alpha > 0$. Variablerna $u_1(t)$ och $u_2(t)$ betecknar inflödet i sjöarna 1 och 2 respektive och anses kända. Antag att man endast kan mäta nivån i en av de tre sjöarna. I vilken sjö måste man mäta nivån för att man skall kunna skatta nivån i de övriga med hjälp av denna mätning? För vilka värden på α kan nivån i de två andra sjöarna skattas? (3 p)

Solution

Om vi antar att C -matrisen ges av $C = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ så får vi observerbarhetsmatris

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c - a & c - \alpha b & -c \\ a - 2c & b\alpha^2 - c\alpha - c & c \end{pmatrix}$$

Om $c = 0$ så blir hela den tredje kolumnen i $\mathcal{O}$ och systemet blir icke-observerbart. Den enda möjligheten är därför att mäta nivån i den tredje sjön, dvs $a = b = 0$ och $c \neq 0$. I detta fall får vi

$$\mathcal{O} = c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -\alpha - 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vilken har determinant $1 - \alpha$. Vi har alltså observerbarhet om $\alpha \neq 1$ (att $\alpha > 0$ var angivet i uppgiften).

Man måste alltså mäta nivån i den tredje sjön för att kunna skatta nivån i de båda andra sjöarna, och de båda utflödena från de första sjöarna får inte bero på respektive nivån med samma proportionalitetskonstant.

8. Ingenjör Kancellsson skall styra systemet

$$Y(s) = G_p(s)U(s) = \frac{s-2}{s^2}U(s)$$

och bestämmer sig för styrlagen

$$U(s) = G_r(s)(R(s) - Y(s))$$

där

$$G_r(s) = \frac{2s+1}{s-2}$$

Beräkna överföringsfunktionen från R till Y för det slutna systemet. Var ligger polerna till denna överföringsfunktion? Beskriv varför styrlagen inte är att rekommendera. (3 p)

Solution

Vi får $Y = G_{cl}R$ med

$$G_{cl} = \frac{G_p G_r}{1 + G_p G_r} = \frac{\frac{2s+1}{s^2}}{1 + \frac{2s+1}{s^2}} = \frac{2s+1}{s^2 + 2s + 1}$$

vilken har dubbelpol i $s = -1$. Dock så har en instabil pol $s = 2$ förkortats i räkningarna, och systemet är ej internt stabilt. Styrsignalen u kommer att innehålla en e^{2t} -term, vilken i teorin inte syns i utsignalen y . I praktiken kommer dock insignalen mätta och utsignalen kommer då att divergera. Man kan inte kancellera instabila poler.