



LUNDS TEKNISKA
HÖGSKOLA
Lunds universitet

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 17 januari 2014 kl 8-13

Poängberäkning och betygsättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng

4: lägst 17 poäng

5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Förs in i Ladok senast 31 Jan 2014. Se även kursens hemsida för mer information.

Lycka till!

Lösningar till tentamen i Reglerteknik AK 20131216

1. Ett första ordningens system ges av (4 p)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -3x(t) + 2u(t) \\ y(t) &= x(t)\end{aligned}$$

Antag att systemet skall styras med en P-regulator $u(t) = K(r(t) - y(t))$, med en konstant K .

- Beräkna öppna systemets överföringsfunktion, poler och nollställen.
- För vilket K hamnar det slutna systemets pol i -5 ?
- Beskriv systemets rotort för $K > 0$, dvs hur slutna systemets poler beror på K .

Solution

- Öppna systemets överföringsfunktion ges av $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = 2/(s + 3)$. Systemet har en pol, -3 , och inga nollställen.
- Slutna systemet ges av $KG/(1 + KG) = 2K/(s + 3 + 2K)$ med pol i $s = -3 - 2K$. Med $K = 1$ fås pol i -5 .
- Polen ges av $s = -3 - 2K$, varför rotorten är en linje som följer negativa reella axeln med start i -3 och som går mot $-\infty$.

2. Man vill reglera en motor beskriven av (3 p)

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s(s+1)}U(s)$$

med en PD-regulator $U(s) = (k + k_d s)(R(s) - Y(s))$. Bestäm parametrarna k och k_d så att slutna systemets karakteristiska polynom ges av

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2,$$

där ζ och ω_0 är givna parametrar. Beskriv också hur parametrarna ζ och ω_0 påverkar slutna systemets snabbhet och dämpning.

Solution

Med $K = k + k_d s$ får vi slutna systemet $\frac{GK}{1+GK} = \frac{k+k_d s}{s^2+(1+k_d)s+k}$. Identifiering av nämnaren med $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$ ger

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_0 = 1 + k_d \\ \omega_0^2 = k \end{cases} \iff \begin{cases} k_d = 2\zeta\omega_0 - 1 \\ k = \omega_0^2. \end{cases}$$

Ett större värde på ω_0 ger ett snabbare system. Parametern ζ ligger mellan 0 och 1 där ett högre värde ger ett bättre dämpat system.

3. Ett linjärt system $G(i\omega)$ med insignal $u(t) = \sin(3t)$ ger upphov till utsignalen $y(t) = 2 \cos(3t)$ (om vi bortser från transienter).

a. Ange vilken slutsats vi kan dra från detta (1 p)

- A. $G(i3) = 2$
- B. $G(i3) = 2i$
- C. $G(i3) = -2i$
- D. något annat (ange vad)

b. För ett annat system gäller att $Y(s) = \frac{1}{s+1}U(s)$. Vad blir $y(t)$ då (1 p)

$$u(t) = \begin{cases} e^{-2t} & \text{if } t \geq 0 \\ 0, & \text{if } t < 0. \end{cases}$$

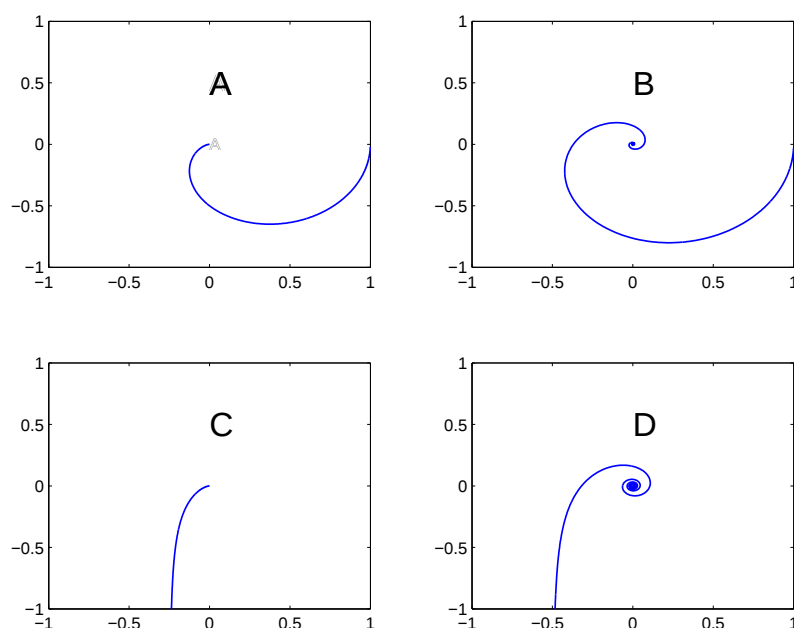
- A. $y(t) = e^{-t}$
- B. $y(t) = e^{-2t}$
- C. $y(t) = e^{-t} + e^{-2t}$
- D. $y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$

Solution

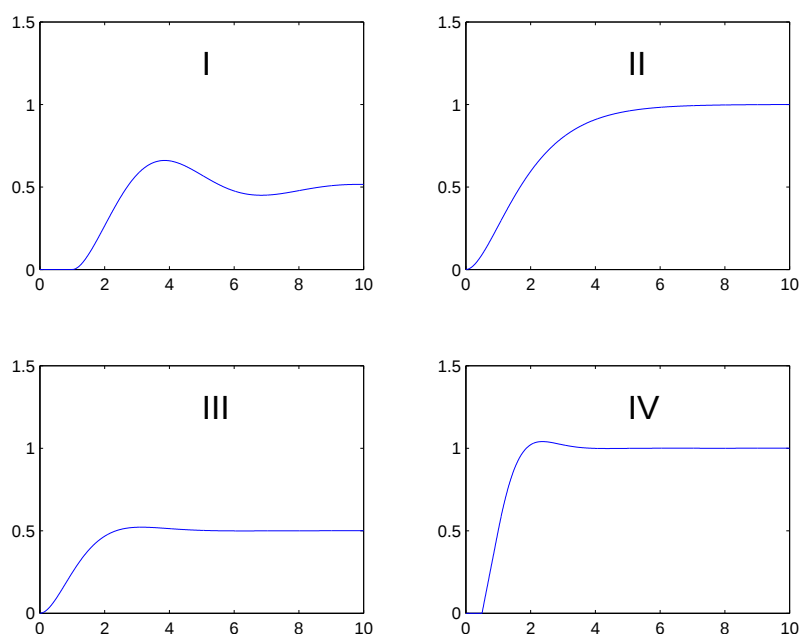
a. Eftersom utsignalen är $|G(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G(i\omega))$ och eftersom $\cos(3t) = \sin(3t + \pi/2)$ ser vi att med $\omega = 3$ har vi $|G(i\omega)| = 2$ och $\arg G(i\omega) = \pi/2$. Detta innebär att $G(i3) = 2e^{i\pi/2} = 2i$, vilket är alternativ B.

b. Från Laplace-tabellen (rad 6) får vi $U(s) = \frac{1}{s+2}$, vilket ger $Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$. Invers Laplace ger (rad 16 i samma tabell) $y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$, vilket är alternativ D.

4. Para ihop Nyquist-kurvorna för de öppna systemen $G(s)$ i figur A – D med figurerna I – IV som visar utsignalerna för motsvarande slutna system, $G(s)/(1 + G(s))$, då insignalen är ett steg med amplitud 1. Glöm inte motivering. (2 p)



Figur 1 Nyquistdiagram A-D för de öppna systemen. Nyquistkurvorna för C och D utanför figurerna fortsätter rakt neråt.



Figur 2 Stegsvär I-IV för de slutna systemen.

Solution

Två av systemen har integralverkan (C,D) dessa har stegsvar som slutar på nivån 1, dvs hör till II och IV. Två av systemet har tidsfördröjning (B,D). Dessa hör till stegsvaren I och IV. Vi får alltså A=III, B=I, C=II, D=IV.

5. En bil kan modelleras med differentialekvationen

$$\ddot{z}(t) = u(t) - \mu \dot{z} \quad (1)$$

där bilens massa normaliserats till $m = 1$, $z(t)$ anger dess position och $\mu > 0$ är en friktionskoefficient. Kraften från motorn betecknas med $u(t)$.

- a. Ställ upp en valfri tillståndsmodell för bilens dynamik (1). Insignalen skall vara den applicerade kraften $u(t)$ och utsignalen $y(t)$ skall vara bilens position $z(t)$. (2 p)
- b. Vid ett visst val av tillståndsvariabler $x(t)$ och parameter μ fås tillståndsmodellen (2 p)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.02 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Konstruera om möjligt en tillståndsåterkoppling $u(t) = -Lx(t) + l_r r(t)$ som placerar slutna systemets poler i $1 \pm i$, och så att statiska förstärkningen från referensen $r(t)$ till utsignalen $y(t)$ är lika med 1.

- c. Konstruera en observerare på formen (2 p)

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t))$$

för systemet (2). Dynamiken för rekonstruktionsfelet skall ha poler i -2 .

Solution

- a. Med tillstånden $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix}$ kan dynamiken (1) skrivas

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\mu x_2 + u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

och tillstånds modellen blir $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$, där

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- b. Tyvärr blev det ett slarvfel i problemtexten: Det var tänkt att polerna skulle hamnat i vänster halvplan i $-1 \pm i$, men nu hamnade polerna i höger halvplan. Då blir lösningen så här:

Tillståndsåterkoppling med $L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix}$ ger

$$\begin{aligned} A - BL &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.02l_1 & -0.1 - 0.02l_2 \end{pmatrix} \\ \det(sI - A + BL) &= \det \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0.02l_1 & s + 0.1 + 0.02l_2 \end{pmatrix} \\ &= s^2 + (0.1 + 0.02l_2)s + 0.02l_1 = 0 \end{aligned}$$

För att slutna systemets poler skall hamna i $1 \pm i$ ska det karakteristiska polynomet vara $s^2 - 2s + 2$. Genom att jämföra koefficienter får vi

$$l_1 = 100, l_2 = -105.$$

För att beräkna l_r kan vi antingen beräkna slutna systemet överföringsfunktion från r till y , dvs $G_{cl}(s) = C(sI - A + BL)^{-1}B = \dots = \frac{0.02l_r}{s^2 + 2s + 2}$ och sätta $G_{cl}(0) = 1$ vilket ger $l_r = 100$, eller så kan vi komma på att i stationäritet är $u = x_2 = 0$ vilket tillsammans med $x_1 = y$ ger att

$$0 = u(t) = -Lx(t) + l_r r(t) = -l_1 y + l_r r.$$

Villkoret $y = r$ i stationäritet ger alltså $l_r = l_1$, dvs $l_r = 100$ som tidigare.

- c. Vi väljer A , B och C som i uppgiften. Designekvationen för K blir att

$$\det(sI - A + KC) = (s + 2)^2 = s^2 + 4s + 4$$

Med $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}^T$ får vi

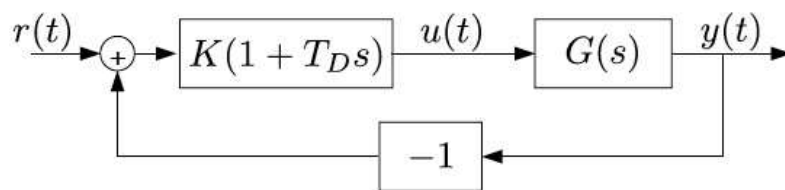
$$\det(sI - A + KC) = \det \begin{pmatrix} s + k_1 & -1 \\ k_2 & s + 0.1 \end{pmatrix} = s^2 + (0.1 + k_1)s + 0.1k_1 + k_2$$

vilket ger $k_1 = 3.9$, $k_2 = 3.61$.

6. I ett bilspel kan man med god approximation anta att överföringsfunktionen från spelarens reaktioner, via exempelvis en joystick, till bilens uppförande på skärmen beskrivs av en dubbelintegrator

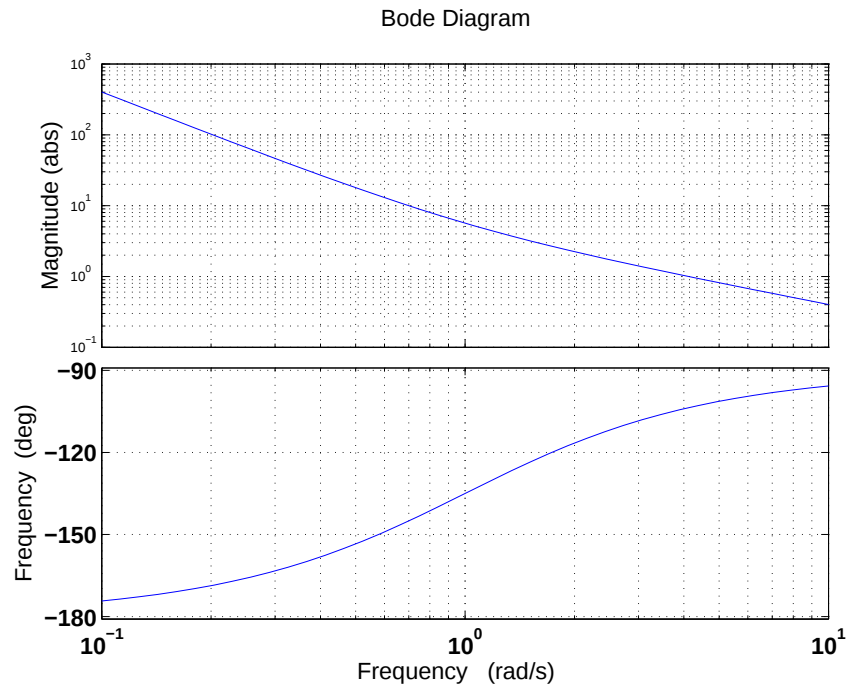
$$G(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Föraren fungerar som en PD-regulator enligt figur nedan.



Figur 3 Återkopplat system i uppgift 6

- a. Bodediagram för det öppna systemet $G_0(s) = \frac{K(1+T_D s)}{s^2}$ visas i följande figur. Ta från denna figur fram K och T_D . (2 p)
- b. I Internet-versionen av bilspelet uppstår fördröjningar då spelet körs på en server och regulatorn, dvs föraren, som en klient. Detta modelleras som en tidsfördröjning e^{-sL} på ingången till $G(s)$ (dvs mellan klient och server). Avgör hur stor tidsfördröjningen L kan vara utan att systemet i föregående uppgift blir instabilt. (1 p)



Figur 4 Bode-diagram för G_0 i uppgift 6

- c. Blir resultatet bättre, sämre eller samma (med avseende på hur stor tidsfördröjningen kan vara) om tidsfördröjningen i stället sitter på utgången till $G(s)$ (dvs mellan server och klient). (1 p)

Tentan fortsätter på nästa sida

Solution

- a. För små ω är $|G_0(i\omega)| \approx K/\omega^2$. Vi avläser magnituden 100 för $\omega = 0.2$, detta ger $K/0.2^2 = 100$, vilket ger $K = 4$. Brytfrekvens för termen $(1+T_D s)$ ges av $\omega = 1/T_D$. Från figuren ser vi att brytfrekvensen ges av $\omega = 1$ (detta syns tydligast i fasen, som går från -180 till -90 och kommit halvvägs till -135 vid $\omega = 1$). Vi får alltså $1/T_D = 1$, dvs $T_D = 1$.
- b. Tidsfördröjningsmarginalen ges av $L_m = \varphi_m/\omega_c$, och vi avläser $\omega_c = 4.1$ rad/s och $\varphi_m \approx 75$ grader $= 75\pi/180 = 1.3$ radianer. Detta ger $L_m = 1.3/4.1 = 0.32$ sekunder.
- c. Det spelar ingen roll, eftersom överföringsfunktionen för processen blir den samma i båda fallen, $G(s) = \frac{K(1+T_D s)e^{-sL}}{s^2}$. Man inser på samma sätt att

om det finns tidsfördröjningar både mellan klient och server, samt mellan server och klient, så är det summan av tidsfördröjningarna som spelar roll, eftersom $e^{-L_1s}e^{-L_2s} = e^{-(L_1+L_2)s}$.

7. Betrakta ett system vars bodediagram återges i figur 5. Designa en kombinerad fasavancerande och fasretarderande kompenseringslänk för G så att skärffrekvensen blir $\omega_c = 30$ rad/s, fasmarginalen blir $\varphi_m = 40$ grader, och statiska felet då referenssignalen är ett enhetssteg blir noll. (4 p)

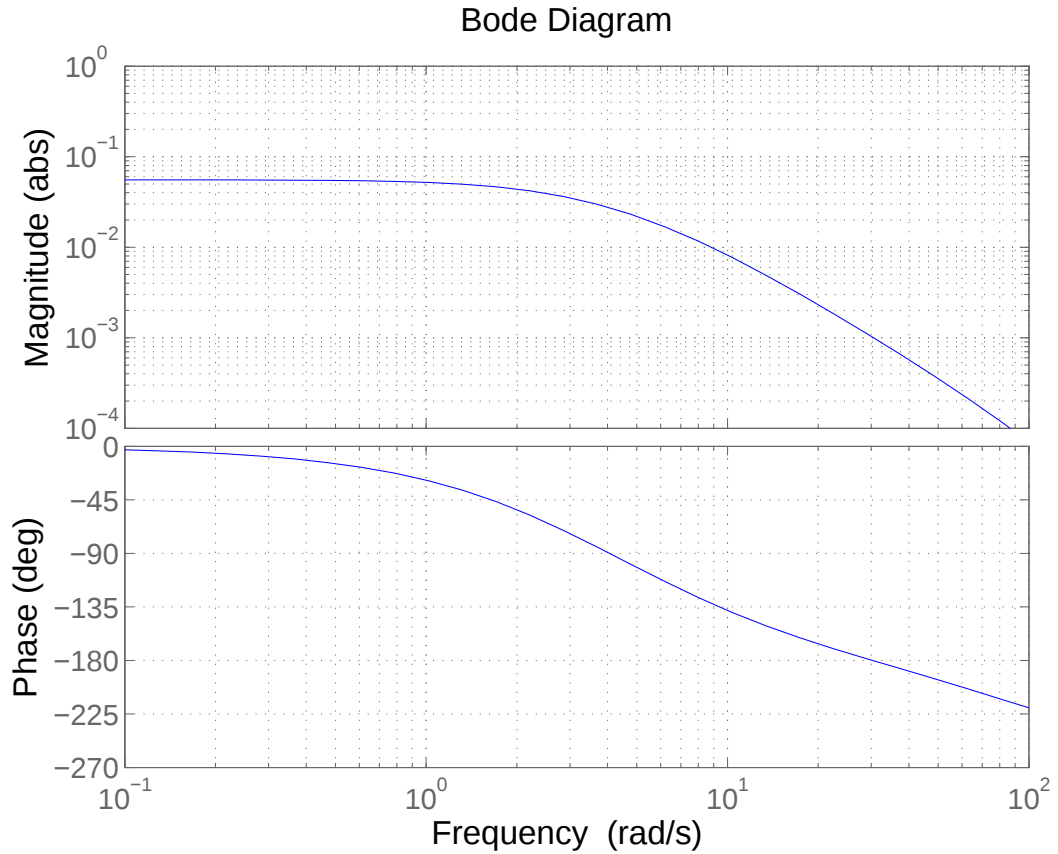


Figure 5 Bode-diagram för systemet i uppgift 7.

Solution

Vi börjar med den fasavancerande länken $K_{lead}(s) = K_k N \frac{s+b}{s+bN}$. Avläsning i diagrammet visar att fasen vid den nya skärffrekvensen 30 rad/s är -180 grader före kompenserings. Eftersom vi vill ha 40 graders fasmarginal och eftersom vi senare kommer lägga till ett lag-filter som sänker fasen ytterligare 6 grader (om vi använder tumregeln) så vill vi höja fasen med 46 grader. Ur diagrammet i formelsamlingen avläser vi då $N = 6.1$. Formeln $\omega_c = b\sqrt{N}$ ger nu $b = \omega_c/\sqrt{N} = 30/\sqrt{6.1} = 12.1$. Vid skärffrekvensen behöver vi även höja förstärkningen med en faktor 10^3 , vilket ger $K_k\sqrt{N} = 1000$, dvs $K_k = 1000/\sqrt{6.1} \approx 400$. Avslutningsvis ges lag-länken (sätt $M = \infty$) av $K_{lag}(s) = \frac{s+a}{s}$ med $a = 0.1\omega_c = 3$. Regulatorn ges alltså av

$$K(s) = K_{lead}(s)K_{lag}(s) = 2440 \cdot \frac{s + 12.1}{s + 74} \frac{s + 3}{s}$$