



LUNDS TEKNISKA
HÖGSKOLA
Lunds universitet

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 16 december 2013 kl 8-13

Poängberäkning och betygsättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng

4: lägst 17 poäng

5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Förs in i Ladok senast 3 Jan 2014. Se även kursens hemsida för mer information.

Lycka till och God Jul!

Lösningar till tentamen i Reglerteknik AK 20131216

1. Betrakta systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x.\end{aligned}$$

- a. Vad är överföringsfunktionen $G(s)$? (2 p)
- b. Beräkna systemets poler. Är systemet instabilt, (marginellt) stabilt eller asymptotiskt stabilt? (1 p)

Solution

- a. Överföringsfunktionen från u till y ges av $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, dvs

$$G(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+5 & 0 \\ -1 & s-3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{(s+5)(s-3)}.$$

- b. Polerna till systemet ges av rötterna till nämnarpolynomet $(s+5)(s-3)$, dvs av $s = -5$ och $s = 3$. Eftersom en pol ligger i höger halvplan är systemet instabilt.

2. Sambandet mellan insignal u och utsignal y för ett system ges av (2 p)

$$y(t) = u(t-3).$$

Ta fram beloppet och argumentet för överföringsfunktionen mellan $u(t)$ och $y(t)$ samt skissa Bodediagrammet i intervallet $\omega \in [0.1, 10]$. Ange fasen för $\omega = 0.1$ och $\omega = 10$ uttryckt i grader.

Solution Överföringsfunktionen för en tidsfördröjning ges av $G(s) = e^{-sL}$ där i detta fall $L = 3$. Bode-diagrammet finns i formelsamlingen. Amplituden $|G(i\omega)| = 1$ för alla frekvenser, och fasen ges av $\arg G(i\omega) = -3\omega$ radianer $= -180 \cdot 3\omega/\pi$ grader. För $\omega = 0.1$ blir fasen $-54/\pi \approx -17$ grader, och för $\omega = 1$ blir den ≈ -1720 grader.

3. En PID-regulator på grundform beskrivs av styrlagen

$$u(t) = K \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right),$$

där $e(t)$ är differensen mellan referensvärdet $r(t)$ och mätsignalen $y(t)$, det vill säga $e(t) = r(t) - y(t)$.

- a. Visa att regulatorns överföringsfunktion ges av (1 p)

$$G_R(s) = K \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right).$$

- b.** I många praktiska implementeringar av en PID-regulator används den något modifierade styrlagen

$$u(t) = K \left(e_p(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de_d(t)}{dt} \right),$$

där $e_p(t) = br(t) - y(t)$ med konstant $b \in [0, 1]$, och $e_d(t) = -y(t)$. Vilka fördelar finns med denna variant av PID-regulatorn? (1 p)

Solution

- a.** Följer av att Laplacetransformen av $\int_0^t e$ är lika med $\frac{E(s)}{s}$ och av $\frac{de}{dt}$ är lika med $sE(s)$.
- b.** Båda förändringarna kan leda till bättre uppförande vid ändringar i referenssignalen. Genom att justera faktorn b kan man påverka snabbheten vid referensändringar, som då inte behöver vara samma som snabbheten vid reglering av tex utsignalstörningar. Man kan tex ibland undvika överslängar vid stegvarsändringar i referensen. Genom att inte derivera referenssignalen kan man också undvika våldsamma reaktioner vid plötsliga ändringar av referenssignalen.
- 4.** Beskriv, gärna genom ett praktiskt exempel, fenomenet windup vid PID-reglering och vad man kan göra åt det. (2 p)

Solution Se boken.

5. Betrakta följande olinjära differentialekvationer.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + u^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \sqrt{x_2}.\end{aligned}$$

a. Antag att $u^0 = 1$ och bestäm systemets stationära punkter. (0.5 p)

b. Linjärisera systemet kring den stationära punkt du fick fram i a. (1.5 p)

Solution

a. Stationära punkter beräknas genom att sätta $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, vilket ger

$$\begin{aligned}0 &= -x_1^0 + 1^2 \\ 0 &= -x_1^0 + \sqrt{x_2^0},\end{aligned}$$

varifrån vi får stationär punkt $(u^0, x_1^0, x_2^0) = (1, 1, 1)$.

b. Beräkning av partiella derivator av de två ekvationerna (som vi betecknar f_1 och f_2) ger

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= -1, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= 0, & \frac{\partial f_1}{\partial u} &= 2u, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= -1, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= \frac{1}{2\sqrt{x_2}}, & \frac{\partial f_2}{\partial u} &= 0\end{aligned}$$

Sätter vi in stationär punkt $(u^0, x_1^0, x_2^0) = (1, 1, 1)$ får vi

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(1, 1, 1) &= -1, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(1, 1, 1) &= 0, & \frac{\partial f_1}{\partial u}(1, 1, 1) &= 2, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(1, 1, 1) &= -1, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(1, 1, 1) &= 0.5, & \frac{\partial f_2}{\partial u}(1, 1, 1) &= 0\end{aligned}$$

och om vi introducerar ny variabler

$$\begin{aligned}\Delta x &= x - x^0 \\ \Delta u &= u - u^0\end{aligned}$$

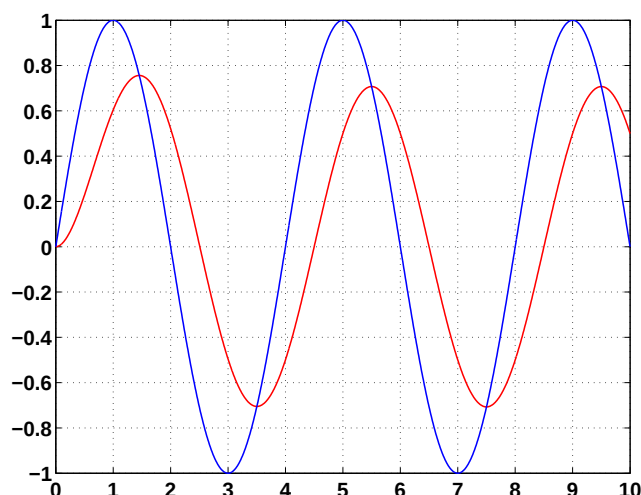
får vi det linjäriserade systemet

$$\Delta \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u.$$

6. Figur 1 visar insignal $u(t) = \sin(\omega t)$ och utsignal $y(t)$ för systemet

$$G(s) = \frac{a}{s + a}.$$

Bestäm parametrarna ω och a . (2 p)



Figur 1 In och utsignal i uppgift 6

Solution Insignalen har amplituden 1 och är därför kurvan med störst amplitud. Från figuren ser vi att periodtiden är $T = 4$ vilket ger $\omega = 2\pi/T = \pi/2$. Utsignalen efter transienter dött ut ges av

$$y(t) = |G(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G(i\omega)).$$

Från figuren ser vi att $|G(i\omega)| \approx 0.7$ och eftersom nollgenomgångarna är 0.5 tidsenheter förskjutna är fassen $\arg G(i\omega) = -0.5/T \cdot 2\pi = -\pi/4$. Om vi jämför med formler för första ordningens system: $|G(i\omega)| = \frac{a}{\sqrt{\omega^2 + a^2}}$ eller alternativt $\arg G(i\omega) = -\arctan(\omega/a)$ ser vi att $a = \omega$. Svar: $\omega = a = \pi/2$.

7. Höjdregeringen av tomtens släde beskrivs av ekvationerna

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

med styrlagen $u = - \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} x + 3r$.

- Var ligger slutna systemets poler? (2 p)
- Tomteverkstan har jobbat hårt med att hitta en annan regulator som placerar polerna i $s = -10$ men inte lyckats. Kan Du förklara varför? (1 p)
- Tomten kan inte mäta både x_1 och x_2 , utan bara utsignalen y , han önskar sig därför ett Kalmanfilter. Designa ett sådant så att Kalmanfiltrets poler hamnar i $s = -8$. (2 p)

Solution

a. Polerna ges av egenvärdena till

$$A - BL = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Eftersom matrisen är triangulär ges egenvärdena av diagonal-elementen, dvs det finns två poler med $s = -3$.

- b.** Systemet är inte styrbart, vilket enkelt kallas genom att beräkna styrbarhetsmatrisen

$$W = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vilken inte är inverterbar. (Tillstånd x_2 är inte styrbart.)

- c.** En skattare ges av

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

Karakteristiska polynomet för Kalmanfiltret ges av

$$\det(sI - A + KC) = \left| \begin{pmatrix} s + 1 + k_1 & -1 \\ k_2 & s + 3 \end{pmatrix} \right| = (s + 1 + k_1)(s + 3) + k_2 = (s + 8)^2.$$

Identifiering av koefficienter ger $k_1 = 12, k_2 = 25$.

- 8.** En process ges av $G_p(s) = \frac{1}{s+1}$ och återkopplas med en PI-regulator som ges av $G_{PI}(s) = 1 + \frac{2}{s}$.
- a.** Då referensen är en ramp $r(t) = at$ uppstår ett stationärt fel, beräkna storleken på detta. (2 p)
- b.** Inför sedan en kompenseringslänk $G_K(s)$ som sänker rampfelet med en faktor 10 utan att systemets stabilitet försämras märkbart (6 graders försämring av fasmarginal är acceptabel). Kretsöverföringsfunktionen är alltså nu $G_0(s) = G_p(s)G_{PI}(s)G_K(s)$. (2 p)

Solution

- a.** Block-schemaräkning ger att

$$sE(s) = \frac{s}{1 + G_p(s)G_{PI}(s)}R(s) = \frac{s}{1 + \frac{1}{s+1}(1 + \frac{2}{s})} \frac{a}{s^2} = \frac{a(s+1)}{s(s+1) + s + 2}.$$

Stationärt fel ges av $\lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$ eftersom polerna till $sE(s)$ ligger i vänster halvplan (polynomet $s(s+1) + s + 2$ är av grad 2 och har positiva koefficienter) så kan vi använda slutvärdesteoremet och vi får

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{a}{2}.$$

- b.** Vi inför en lag-länk $G_K(s) = \frac{s+a}{s+a/M}$. Eftersom ursprungssloopen har integralverkan minskar stationärt fel då med en faktor M , vi sätter därför $M = 10$. För att använda tumregeln $a = 0.1\omega_c$ måste vi bestämma ursprunglig skärfrekvens ω_c som ges av $|G_p(i\omega_c)G_{PI}(i\omega_c)| = 1$. Vi får

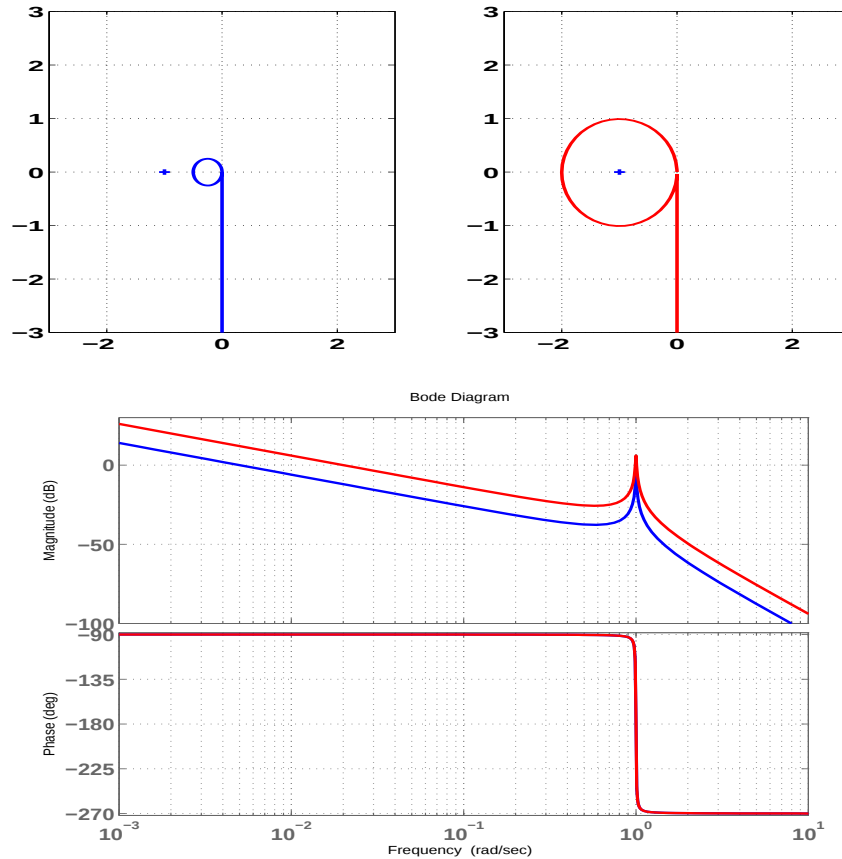
$$1 = \left| \frac{1}{i\omega_c + 1} \frac{i\omega_c + 2}{i\omega_c} \right| = \frac{(\omega_c^2 + 4)^{1/2}}{(\omega_c^2 + 1)^{1/2}\omega_c}$$

vilket ger ekvationen $\omega_c^2(\omega_c^2 + 1) = \omega_c^2 + 4$, vilket ger $\omega_c = \sqrt{2}$. Vi väljer därför $a = 0.1 \cdot \sqrt{2} \approx 0.14$.

9. Ett atomkraftsmikroskop styrt av en I-regulator beskrivs av det öppna systemet

$$G_0(s) = G_R(s)G_P(s) = \frac{k_i}{s} \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\omega_0\zeta s + \omega_0^2}$$

vars Nyquist-kurva och Bode-diagram återges nedan för $\omega_0 = 1, \zeta = 0.005$ för två olika värden på k_i .



- Visa att Nyquistkurvans skärning med negativa reella axeln ges (då $k_i > 0$) av $G_0(i\omega_0) = -\frac{k_i}{2\zeta\omega_0}$. (1 p)
- Beräkna k_i som ger amplitudmarginal $A_m = 2$. (Du får använda informationen i uppg. a.) (1 p)
- Antag $\omega_0 = 1, \zeta = 0.005$ som i figurerna. Vilken fasmarginal kommer man få om man bestämmer k_i så att amplitudmarginalen blir $A_m = 2$? (Avläsning i diagram duger.) (1 p)

Solution

- a. Om vi stoppar in $s = i\omega_0$ ser vi att

$$G(i\omega_0) = \frac{k_i}{i\omega_0} \cdot \frac{\omega_0^2}{-\omega_0^2 + 2i\omega_0^2\zeta + \omega_0^2} = -\frac{k_i}{2\zeta\omega_0}$$

vilket alltså ligger på negativa reella axeln. Eftersom fasen sjunker monotont från -90 till -270 grader finns inga andra skärningar (vilket ju även syns i figuren).

- b.** Vi har $-\frac{1}{A_m} = -\frac{k_i}{2\zeta\omega_0}$ vilket ger $k_i = \zeta\omega_0$ då $A_m = 2$.
- c.** Den vänstra Nyquistkurvan har amplitudmarginal 2. Från figuren ser vi då att fasmarginalen är ungefär 90 grader.