

Självstudieövning 2: Linjära Dynamiska System

Mikael Johansson och Magnus Gäfvert

Institutionen för Reglerteknik
Lunds Tekniska Högskola



Målsättning och förkunskaper

Målet med denna laboration är att utveckla en intuitiv förståelse för sambanden mellan de olika representationer av linjära system som presenteras i kursen Reglerteknik AK.

I laborationen refereras kursböckerna K.J. Åström, Reglerteori, Almqvist & Wiksell 1976 samt T. Glad och L. Ljung, Reglerteknik Grundläggande teori, Studentlitteratur 1989.

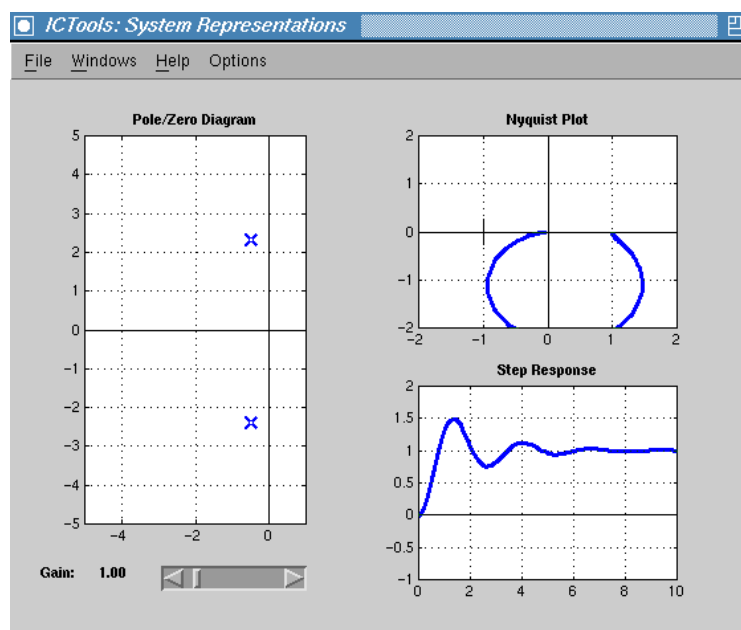
Programvara

Linjära system kan representeras på många olika sätt: med singularitetsdiagram, frekvenssvar och tidssvar. Frekvenssvaret kan i sin tur representeras med exempelvis Nyquist och Bode-diagram. Målet med denna laboration är att illustrera sambanden mellan de olika representationerna. Till övningen hör ett specialskrivet program som gör det möjligt att på ett enkelt sätt manipulera och experimentera med linjära system.

Om du arbetar på EFDs UNIX-system måste du skriva initregler innan du startar matlab. Övningsprogrammen startas sedan i Matlab-5 med kommandot

```
>> ictools
```

Välj alternativet "Linear Systems|Analysis of Linear Systems" ur listan på övningar. Klicka därefter på knappen märkt "Run Module". Efter någon sekund dyker övningsprogrammet nedan upp på din skärm.



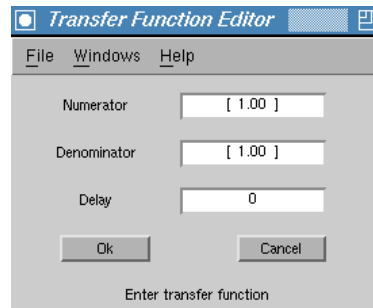
Figur 1 Övningsprogrammet för systemrepresentationer.

Programmet visar tre plottar i huvudfönstret: ett singularitetsdiagram till vänster och två mindre plottar till höger. Singularitetsdiagrammet visar systemets poler (markerade med "x") och nollställen (markerade med "o"). Du kan förändra det linjära systemet genom att med hjälp av musen gripa tag i en pol- eller nollställes-markör. Under singularitetsdiagrammet finns även ett reglage med vilket man kan justera systemets statiska förstärkning.

De mindre plottarna till höger visar alternativa representationer av det dynamiska systemet. Programmet kan visa systemets Nyquistkurva, Genom menyn "Options|Upper plot" och "Options|Lower plot" kan du välja hur tids- och frekvenssvar skall presenteras. I den övre plotten kan du välja mellan att visa Nyquistkurvan eller amplitudkurvan för Bodediagrammet. I nedre plotten kan du på samma sätt välja om du vill se stegsvaret eller faskurvan för Bodediagrammet.

Att ange ett system

I ICTool definieras ett system genom att man anger dess överföringsfunktion. För att mata in en överföringsfunktion väljer man menyvalet "System|New System". Detta menyval öppnar en dialogruta som begär överföringsfunktionens täljar- och nämnarpolynom.



Figur 2 En överföringsfunktion anges genom att specificera dess täljare (numerator) och nämnare (denominator).

Ett polynom representeras i Matlab av dess koefficientvektor. Till exempel representeras polynomet

$$p(s) = s^3 + 2s^2 + 5$$

av koefficientvektorn

$$[1 \quad 2 \quad 0 \quad 5]$$

Att manipulera en överföringsfunktion

Systemets överföringsfunktion kan justeras genom att med hjälp av musen gripa tag i en pol eller ett nollställe och flytta runt det i singularitetsdiagrammet. Varje förändring av systemets överföringsfunktion resulterar i en ögonblicklig uppdatering av de två mindre plottarna.

Singularitetsdiagrammet är en grafisk presentation av ett systems överföringsfunktion

$$G(s) = K \frac{B(s)}{A(s)} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

Systemets poler, p_i , markeras med kryss och systemets nollställena, z_i , markeras med ringar. Eftersom överföringsfunktionen har reella koefficienter så förekommer komplexa poler och nollställena alltid i komplexkonjugerade par. I kursen brukar vi använda faktoriseringen $(s - p_i)(s - \bar{p}_i) = s^2 + 2\zeta_i\omega_i s + \omega_i^2$ för komplexkonjugerade poler (alt. nollställena).

Singularitetsdiagrammet identifierar en överföringsfunktion så när som på förstärkningen K . I ICTool bestäms den statiska förstärkningen ($KB(0)/A(0)$) av värdet på reglaget under singularitetsdiagrammet.

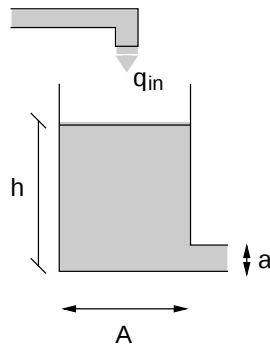
1. Första ordningens system

EXEMPEL 1.1—EN FÖRSTA ORDNINGENS PROCESS

Nivån i en vätsketank kan beskrivas av följande första ordningens differential-ekvation

$$\frac{d}{dt}h(t) = \frac{1}{A}q_{in} - \frac{a}{A}\sqrt{2gh(t)}$$

där a betecknar tankens utloppsarea samt A betecknar tankens tvärsnittsarea, se figur 3.



Figur 3 Schematisk bild av en vätsketank.

En linjäriserad modell av tanken ges av

$$\frac{d}{dt}\Delta h(t) = -\frac{a}{A}\sqrt{\frac{g}{2h_0}}\Delta h(t) + \frac{1}{A}q_{in}(t)$$

Detta system har en pol i $-a/A\sqrt{g/2h_0}$. Genom att öka utloppsarean a eller minska tvärsnittsarean A kan systemets pol föras allt längre bort från origo. Systemet blir då snabbare. $\square$

Att läsa

Första ordningens system behandlas i Åström s. 197–198 och Glad/Ljung s. 34.

Att göra

För att ange ett system som man kan manipulera senare, välj "System|New System". Ett bra system att börja med kan vara

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Detta system har en pol i $s = -1$. Dess täljarpolynom (eng. numerator) anges som

$$[1]$$

och dess nämnarpolynom (eng. denominator) som

$$[1 \quad 1]$$

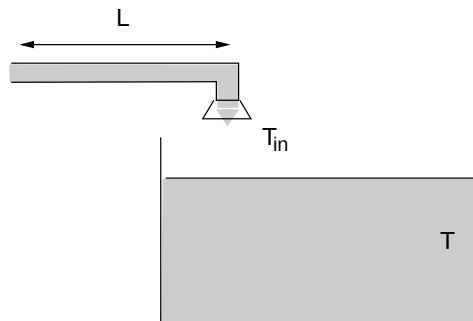
Gör följande experiment:

- Undersök sambandet mellan polens läge och systemets stegsvar.
- Vad händer om polen ligger i högra halvplanet ?
- Hur påverkas Nyquistdiagrammet av polens läge ?
- Variera förstärkningen och se hur det påverkar stegsvar och Nyquistdiagram.
- Studera polens och förstärkningens inverkan på Bodediagrammet.

2. System med dödtid

EXEMPEL 2.1—ETT SYSTEM MED DÖDTID

Dödtider modellerar transportfördröjningar. Ett enkelt system med dödtid uppkommer när man vill justera temperaturen på vattnet i ett badkar, se figur 4. För att öka badtemperaturen justerar vi temperaturreglaget på inflödet. Pga duschslangens längd tar det en tid innan inflödets temperatur ändras, och badvattnets temperatur ökar. Ju längre duschslangen är, desto längre blir systemets dödtid. □



Figur 4 Schematisk bild av ett badkar.

Att läsa

Du kan läsa mer om system med tidsfördröjningar i Glad-Ljung s. 105–107 eller i Åström s. 63.

Att göra

Ange ett första ordningens system med tidsfördröjning $L = 1$ sek.

$$\frac{e^{-sL}}{s + 1}$$

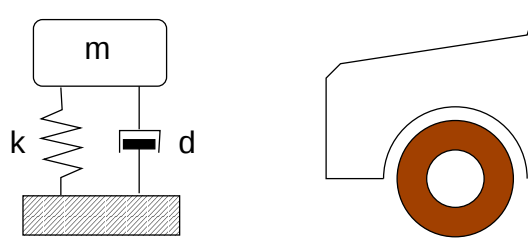
och utför följande experiment:

- Undersök sambandet mellan dödtidens längd L och stegsvaret.
- Undersök sambandet mellan dödtidens längd och Nyquistdiagrammet.
- Undersök sambandet mellan dödtidens längd och Bodediagrammet.

3. Andra ordningens system

EXEMPEL 3.1—ETT ANDRA ORDNINGENS SYSTEM

Dämparsystemet på en personbil kan något förenklat beskrivas som ett fjäder-mass-system enligt figur 5.



Figur 5 Schematisk bild av dämparsystemet på en bil.

Om vi låter bilens massa vara m , fjäderkoefficienten vara k samt dämpningen d så kan variationer i chassits avstånd till marken, y , beskrivas av

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + d \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F(t)$$

där F bl.a. betecknar störningar från ojämnheter i vägbanan. Vi kan skriva modellen på standardformen

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega \frac{dy(t)}{dt} + \omega^2 y(t) = KF(t)$$

genom att definiera $\omega = \sqrt{k/m}$ samt $\zeta = d/2\sqrt{mk}$. □

Att läsa

Andra ordningens system behandlas av Åström på s. 198–200 och Glad/Ljung på s. 35.

Att göra

Ange ett andra ordningens system

$$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

och gör följande experiment

- Håll ζ konstant och variera ω_0 . Hur påverkas stegsvaret?
- Håll ω_0 konstant och variera ζ . Hur påverkas stegsvaret?
- Studera hur Nyquistdiagrammet påverkas av variationer i ζ och ω_0 .
- Studera hur Bodediagrammet påverkas av variationer i ζ och ω . Undersök även förhållandet mellan systemets Bodediagram och Stegsvar.

4. Inverkan av nollställen

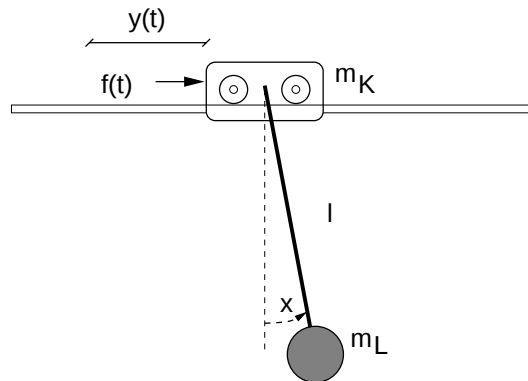
I mekaniska system uppkommer nollställen då man har krafter som växelverkar. Lite informellt brukar man säga att nollställen beskriver hur ett system är kopplat.

EXEMPEL 4.1—ETT SYSTEM MED NOLLSTÄLLEN

Positioneringsdynamiken för en travers enligt figur 6 har en överföringsfunktion på formen

$$Y(s) = \frac{s^2 l + g}{s^2(m_K l s^2 + (m_L + m_K)g)} F(s) \quad (1)$$

där m_K och m_L betecknar kranens respektive lastens massa. Dubbelpolen $s_{1,2} = 0$ kommer från en enkel modell av kranen, medan det komplexa polparet modellerar egenfrekvensen hos det sammansatta systemet. De imaginära nollställena modellerar fenomenet att en sinusformad kraft med frekvensen $\sqrt{g/l}$ inte ger någon rörelse av traversen. Tolkningen är att en sådan insignal motverkas av kraften från den fritt svängande lasten. $\square$



Figur 6 Principskiss av en travers.

Att läsa

Läs mer om system med nollställen och svårigheterna att reglera icke-minfas system i Åström s. 200–201, 271–273 eller Glad/Ljung s. 107–110. Notera att systemet i figur 6 är minimum-fas.

Att göra

Ange ett andra ordningens system med ett nollställe

$$\frac{s + 1}{s^2 + s + 1}$$

och gör följande experiment

- Undersök hur stegsvaret varierar då nollstället varierar. Kontrollera speciellt vad som händer då nollstället ligger nära origo eller i höger halvplan.
- Undersök hur Nyquistkurvan varierar då nollstället varierar.
- Undersök hur Bodediagrammet varierar då nollstället varierar.

5. Högre ordningens system

Många industriella processer är av väsentligt högre ordning än de enkla system som vi hittills har använt oss av. System av högre ordning uppkommer t.ex. när man kopplar samman ett antal enkla dynamiska system - även givare och ställ-don har dynamik. I många fall kan man med god noggrannhet approximera ett dynamiskt system av hög ordning med ett enkelt första eller andra ordningens system.

EXEMPEL 5.1—ETT HÖGRE ORDNINGENS SYSTEM

Betrakta en hisskonfiguration enligt figur 7. Antag att en välreglerad motordynamik ges av

$$F(s) = \frac{1}{sT_1 + 1} X_{ref}(s) := G_m(s)X_{ref}(s)$$

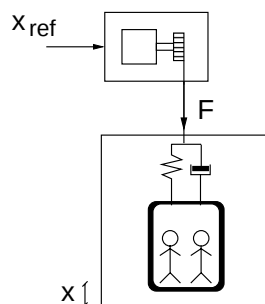
samt att linans elasticitet kan modelleras med ett andra ordningens system

$$X(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} F(s) := G_l(s)F(s)$$

Dynamiken från referensnivå, X_{ref} , till verklig nivå för hisskorgen, X , ges då av följande tredje ordningens system

$$X(s) = G_m(s)G_l(s)X_{ref} \quad (2)$$

□



Figur 7 Schematisk bild av en hiss.

Att göra

Ange ett högre ordningens system

$$\frac{5}{(s^2 + s + 1)(s + 5)} = \frac{5}{s^3 + 6s^2 + 6s + 5}$$

och utför följande experiment:

- Undersök stegsvarets utseende då de komplexa polerna ligger betydligt närmare origo än den reella.
- Undersök stegsvarets utseende då den reella polen ligger betydligt närmare origo än de komplexa. När kan systemet approximeras med ett första ordningens system ?

- c. Undersök stegsvarets utseende då alla tre polerna ligger på ungefär samma avstånd från origo. När kan systemet approximeras med ett andra ordningens system ?