

Repetition inför Reglerteknik AK

Här följer ett antal repetitionsuppgifter som du rekommenderas att lösa för att repetera matematik inför dina studier i reglerteknik. Uppgifterna är tänkta att lyfta fram kunskaper som du skaffat dig i tidigare kurser. Därför bör du parallellt med att du löser uppgifterna titta på motsvarande avsnitt i dina gamla kursböcker. Böckerna i linjär algebra, flerdimensionell analys och framför allt linjära system är de som du kommer att ha mest nytta av. Bekanta dig gärna också redan nu med litteraturen i reglerteknik. Tänk på att det är praktiskt att använda kursbäckernas indexsidor.

Programpaketen Matlab och Maple kommer du att ha stor nytta av i framtiden. Använd därför gärna dem redan nu för de uppgifter nedan där det är relevant.

1. Taylorutveckling

- (a) Skriv upp Taylorpolynomet av gradtal 2 för en allmän funktion $f = f(x_1, x_2)$ runt punkten $(x_1, x_2) = (x_{10}, x_{20})$.
- (b) Linjärisera funktionen $f(x) = (x - 1)^2$ kring origo.

2. Matriser

- (a) Invertera följande matriser

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

- (b) Det är bra att kunna inversen till en 2×2 -matris utantill. Skriv ned den för matrisen

$$A_4 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- (c) Hur använder man Gausselimination för att bestämma rangen hos en matris (se Linjär algebra)? Bestäm rangen hos matriserna A_1 , A_2 och A_3 .

3. Egenvärden och egenvektorer

- (a) Antag att λ är ett egenvärde till matrisen A och att z är motsvarande egenvektor. Vilken relation gäller mellan A , λ och z ?
- (b) Beräkna egenvärdena till matriserna A_1 , A_2 och A_3 i uppgift 2(a).
- (c) Låt $a = d = -1$ och $b = -c = 3$ för A_4 ovan. Diagonalisera A_4 och bestäm transformationsmatrisen (dvs bestäm T så att $T^{-1}A_4T$ är en diagonalmatris).

4. Första ordningens differentialekvation

Betrakta differentialekvationen

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + 5u(t) \quad x(0) = 0$$

- (a) Lös ekvationen för $t > 0$ med hjälp av integrerande faktor.
- (b) Lös samma differentialekvation med hjälp av Laplacetransform (den enkelsidiga).
- (c) Gör om räkningarna i både (a) och (b) då $x(0) = x_0 \neq 0$.

5. Exponentialmatrisen $\exp A$

- (a) Exponentialmatrisen $\exp A$ dyker upp när vi löser system av differentialekvationer. Ja, på vilket sätt då? Utrön detta genom att skriva upp formeln för $x(t)$ när $t > t_0$ givet systemet

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$$

där A är en kvadratisk matris och $x(t_0) = x_0 \neq 0$. (Titta gärna igenom den enkla härledningen i Lineära system.)

- (b) Beräkna $\exp A_i$ för matriserna A_1 , A_2 och A_4 ($a = d = -1$ och $b = -c = 3$).

6. Tillståndsrepresentation

- (a) Ett system givet på tillståndform skrives

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{1}$$

Härled överföringsfunktionen för det, dvs bestäm $G(s)$ då $Y(s) = G(s)U(s)$ genom att Laplacetransformera (1) under antagandet att $x(0) = 0$.

- (b) Överföringsfunktionen $G(s) = b(s)/a(s)$ är en rationell funktion. Vad kallar vi rötterna till polynomen b respektive a ? Vilken relation finns mellan egenvärdena till matrisen A i (1) och rötterna till polynomet a .
- (c) Bestäm $y(t)$ för systemet (1) då $x(0) = x_0 \neq 0$ både genom att använda 5(a) och 6(a), dvs utför beräkningarna både i tidsplanet och med hjälp av Laplacetransform.

7. Stabilitet

- (a) Uttryck i ord vad det innebär att ett system är instabilt.
- (b) Betrakta systemet (1) ovan. Vad måste gälla för att det ska vara stabilt.
- (c) Vad säger argumentvariationsprincipen? Vad är Nyquistkriteriet och hur följer det av argumentvariationsprincipen?

8. Mer Laplacetransform

Antag att vi har ett system som ges av överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s+1}\tag{2}$$

och som har insignal u och utsignal y , dvs $Y(s) = G(s)U(s)$.

- (a) Låt insignalen vara ett enhetssteg vid $t = 0$, alltså

$$u(t) = \theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}\tag{3}$$

Vad är Laplacetransformen $U(s)$? Bestäm utsignalen $y(t)$, om $y(t) = 0$ då $t < 0$.

- (b) Bestäm utsignalen om $u(t) = \sin t$.

9. Begynnelse- och slutvärdessatserna

- (a) Hur lyder begynnelsevårdessatsen?
- (b) Hur lyder slutvärdessatsen? Vilka förutsättningar måste vara uppfyllda för att slutvärdessatsen ska gå att applicera?
- (c) Betrakta systemet $Y(s) = G(s)U(s)$ där $G(s)$ ges av (2). Beräkna $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ med hjälp av slutvärdessatsen, då $u(t)$ ges av (3). Bestäm även gränsvärdet genom att först beräkna $y(t)$ explicit.
- (d) Låt $G(s) = 1/(1+s^2)$. Beräkna de båda gränsvärden som ingår i slutvärdessatsen var för sig. Gäller slutvärdessatsen för detta system (jämför uppgift (b))?