

Lösningar till ”Repetition inför Reglerteknik AK”

23 oktober 2002

1. Taylorutveckling

(a) Se Analys i flera variabler. Taylorpolynomet för f blir

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2) = & f(x_{10}, x_{20}) + f'_{x_1}(x_{10}, x_{20})(x_1 - x_{10}) \\ & + f'_{x_2}(x_{10}, x_{20})(x_2 - x_{20}) + \frac{1}{2}f''_{x_1x_1}(x_{10}, x_{20})(x_1 - x_{10})^2 \\ & + f''_{x_1x_2}(x_{10}, x_{20})(x_1 - x_{10})(x_2 - x_{20}) + \frac{1}{2}f''_{x_2x_2}(x_{10}, x_{20})(x_2 - x_{20})^2 \end{aligned}$$

(b) MacLaurin-utveckling av f ger

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$$

där $o(x)$ (”ordo x ”) är en funktion som går snabbare mot noll än x då $x \rightarrow 0$. När x är nära noll kan denna försummas och vi får

$$f(x) \approx 1 - 2x$$

2. Matriser

(a) Inverserna är $A_1^{-1} = -1/2$

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \quad A_3^{-1} = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.3 & 0 \\ -0.3 & -0.1 & 0 \\ -0.02 & 0.06 & -0.2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A_4^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Notera att A_4 är inverterbar endast om $ad - bc \neq 0$.

(c) Se sidorna 70–71 i Linjär algebra.

$$\text{rang}(A_1) = 1 \quad \text{rang}(A_2) = \text{rang}(A_3) = 3$$

3. *Eigenvärden*

- (a) Från definitionen för egenvärde och egenvektor har vi att $Az = \lambda z$.
(b) Eigenvärdena till matriserna A_1, A_2 och A_3 är

$$\{-2\} \quad \{2, 4, 6\} \quad \{-5, -1 \pm 3i\}$$

- (c) Transformationsmatrisen

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

diagonaliserar A_4 så att

$$T^{-1}A_4T = \begin{pmatrix} -1 + 3i & 0 \\ 0 & -1 - 3i \end{pmatrix}$$

4. *Första ordningens differentialekvation*

- (a) Integrerande faktor till differentialekvationen

$$\dot{x}(t) + 2x(t) = 5u(t) \quad (1)$$

är e^{2t} (se Analys i en variabel). Om vi multiplicerar (1) med denna får vi

$$\frac{d}{dt} \left(e^{2t} x(t) \right) = 5e^{2t} u(t)$$

Integrera och multiplicera båda sidorna med e^{-2t}

$$x(t) = e^{-2t} \int_0^t 5e^{2s} u(s) ds + Ce^{-2t} \quad (2)$$

Eftersom $x(0) = 0$ blir integrationskonstanten $C = 0$. Alltså

$$x(t) = \int_0^t 5e^{-2(t-s)} u(s) ds \quad (3)$$

- (b) Inför $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ och $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$. Om differentialekvationen (1) Laplace-transformeras så får vi

$$sX(s) - x(0) + 2X(s) = 5U(s)$$

Följdaktligen blir

$$X(s) = \frac{1}{s+2} x(0) + \frac{5}{s+2} U(s) \quad (4)$$

Vidare är

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5}{s+2} \right\} = 5e^{-2t} \triangleq f(t)$$

och eftersom $x(0) = 0$ blir alltså

$$x(t) = f(t) * u(t) = \int_0^t f(t-s) u(s) ds = \int_0^t 5e^{-2(t-s)} u(s) ds$$

- (c) Om $x(0) \neq 0$ försvinner inte den första termen i (4), varför lösningen även kommer att innehålla en transient term (som går mot noll med tiden). Vi får

$$x(t) = x_0 e^{-2t} + \int_0^t 5e^{-2(t-s)} u(s) ds$$

Samma resultat ger (2).

5. Exponentialmatrisen $\exp A$

- (a) Härledningen i kapitel 5 i Lineära system ger

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} u(s) ds \quad (5)$$

- (b)

$$\exp A_1 = e^{-2} \quad \exp A_2 = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^4 & 0 \\ 0 & 0 & e^6 \end{pmatrix}$$

och

$$\begin{aligned} \exp A_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-1+3i} & 0 \\ 0 & e^{-1-3i} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} -0.36 & 0.052 \\ -0.052 & -0.36 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. Tillståndsrepresentation

- (a)

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- (b) Rötterna till b kallas nollställena och rötterna till a poler. Egenvärdena λ_i till A är lika med rötterna till a , dvs $a(\lambda_i) = 0$.
- (c) Motsvarande ekvation (5) ovan blir för detta system

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s) ds$$

och alltså

$$y(t) = C e^{At} x_0 + C \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s) ds + D u(t)$$

Samma resultat fås genom att beräkna den inversa Laplace-transformen till $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$.

7. Stabilitet

- (a) Ett system av differentialekvationer sägs vara instabilt om det finns lösningar som är obegränsade för stora t .
- (b) Egenvärdena till A ska ligga i vänster halvplan, dvs $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$.
- (c) Läs sidan 15.4 och framåt i Lineära system.

8. Mer Laplace-transform

- (a) Laplace-transformen $U(s) = 1/s$ medför att

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{(s+1)s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

Alltså

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = (1 - e^{-t})\theta(t) \quad (6)$$

- (b) En sinussignal med vinkelfrekvensen ω in på ett stabilt linjärt system G förstärks $|G(i\omega)|$ och fasvrids $\arg G(i\omega)$. Följdaktligen

$$y(t) = |G(i)| \sin(t + \arg G(i)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t - \pi/4)$$

9. Begynnelse- och slutvärdessatserna

- (a) Se avsnitt 14.12 i Lineära system.
(b) Se avsnitt 14.12 i Lineära system. För att slutvärdessatsen ska kunna användas för att beräkna $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$, måste $sY(s)$ vara asymptotiskt stabil (alla poler måste ha negativ realdel).
(c) Eftersom G är stabil så kan slutvärdessatsen användas. Satsen ger att

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)U(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{(s+1)s} = 1$$

vilket är detsamma som fås om $t \rightarrow \infty$ i (6).

- (d) Eftersom polerna till G är $\pm i$, så är G ej asymptotiskt stabil. Följdaktligen gäller ej slutvärdessatsen. (Vad blir $y(t)$ i detta fall?)