



LUNDS TEKNISKA
HÖGSKOLA
Lunds universitet

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 26 april 2014 08-13

Poängberäkning och betygsättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng

4: lägst 17 poäng

5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet läggs in i LADOK senast måndagen den 12/5. Visning sker tisdagen den 15/5 klockan 12.30-13.00 i Lab C på första våningen i Maskinhuset.

Lycka till!

1. Ett system beskrivs av differentialekvationen

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) + \dot{u}(t) = 2u(t).$$

- a. Är systemet asymptotiskt stabilt? (1 p)
- b. Finn en tillståndsrepresentation av systemet. (1 p)

Solution

- a. Laplacetransformering av differentialekvationen ger

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) + 4sY(s) + 3Y(s) + sU(s) &= 2U(s) \\ \iff (s^2 + 4s + 3)Y(s) &= -(s - 2)U(s) \\ \iff Y(s) &= -\frac{s - 2}{(s + 1)(s + 3)}U(s). \end{aligned}$$

Överföringsfunktionen för systemet är alltså

$$G(s) = -\frac{s - 2}{(s + 1)(s + 3)},$$

som har alla poler strikt i vänster halvplan. Alltså är systemet asymptotiskt stabilt.

- b. Överföringsfunktionen för systemet är

$$G(s) = -\frac{s - 2}{(s + 1)(s + 3)} = -\frac{s - 2}{s^2 + 4s + 3}.$$

Den kanoniska observerbara tillståndsrepresentationen ges av

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \\ y &= [1 \quad 0] z. \end{aligned}$$

2. Antag att vi har processen $G_p(s) = \frac{1}{1.1+s}$.

- a. Vad blir det stationära felet då insignalen är ett enhetssteg? (1 p)
- b. Låt oss nu återkoppla och reglera processen med en regulator så att $u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t r(\tau) - y(\tau) d\tau$, $T_i > 0$ ($u(t)$, $r(t)$ och $y(t)$ är de vanliga beteckningarna för styrsignal, referenssignal respektive utsignal). Vad blir det stationära felet av ett enhetssteg? (1 p)
- c. Låt nu referensvärdet vara en rampsignal med lutning ett och $T_i = 0.5$. Vad blir det stationära felet? Finns det något $t \geq 0$ så att $y(t) \geq 0.8$? (1 p)

Solution

- a. Om insignalen är ett enhetssteg blir $R(s) = \frac{1}{s}$. Felet fås av

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - Y(s) = R(s) - G_p(s)U(s) = (1 - G_p(s))R(s) \\ &= \left(1 - \frac{1}{s + 1.1}\right) \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Eftersom $sE(s)$ är stabil, kan slutvärdesteoremet användas. Så det stationära felet blir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} 1 - \frac{1}{1.1 + s} = 1 - \frac{1}{1.1} = \frac{1}{11} \approx 0.09.$$

- b. Regulatorn har överföringsfunktionen $G_r(s) = \frac{1}{T_i s}$. För det återkopplade systemet blir överföringsfunktionen mellan referenssignalen och felet

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_r(s)G_p(s)} U(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{T_i s(s+1.1)}} U(s) = \frac{T_i s(s+1.1)}{T_i s^2 + 1.1T_i s + 1} U(s).$$

Med $U(s) = \frac{1}{s}$ blir $sE(s)$ stabilt och

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = 0.$$

- c. Med $U(s) = \frac{1}{s^2}$ blir

$$E(s) = \frac{T_i s(s+1.1)}{s^2 + 1.1T_i s + 1} \frac{1}{s^2} = \frac{T_i(s+1.1)}{s^2 + 1.1T_i s + 1} \frac{1}{s}.$$

$sE(s)$ är fortfarande stabilt och

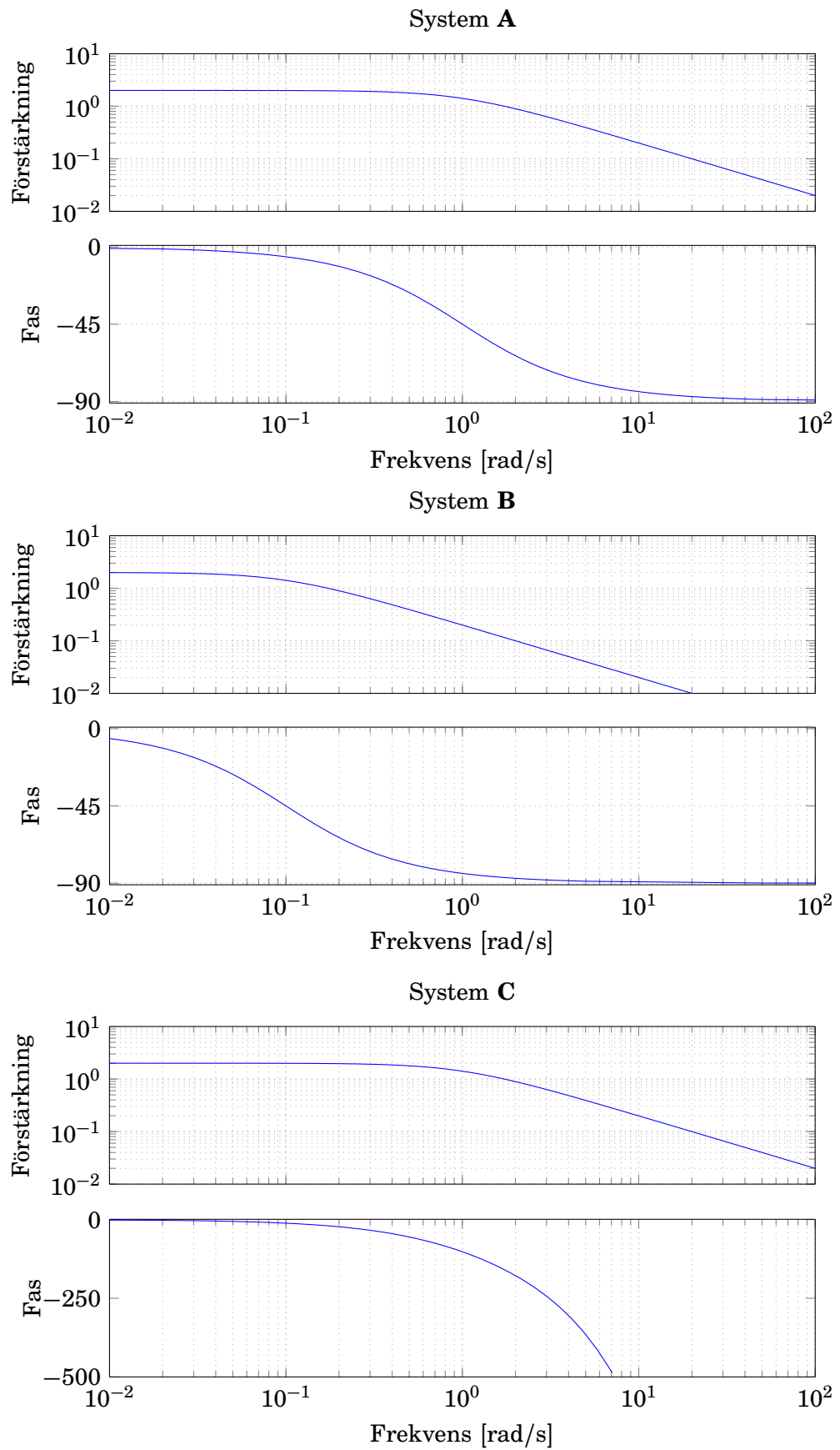
$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = 1.1T_i = 0.55.$$

Utsignalen kommer asymptotiskt ligga 0.55 under referenssignalen. Men eftersom $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \infty$ finns t sådana att $y(t) \geq 0.8$.

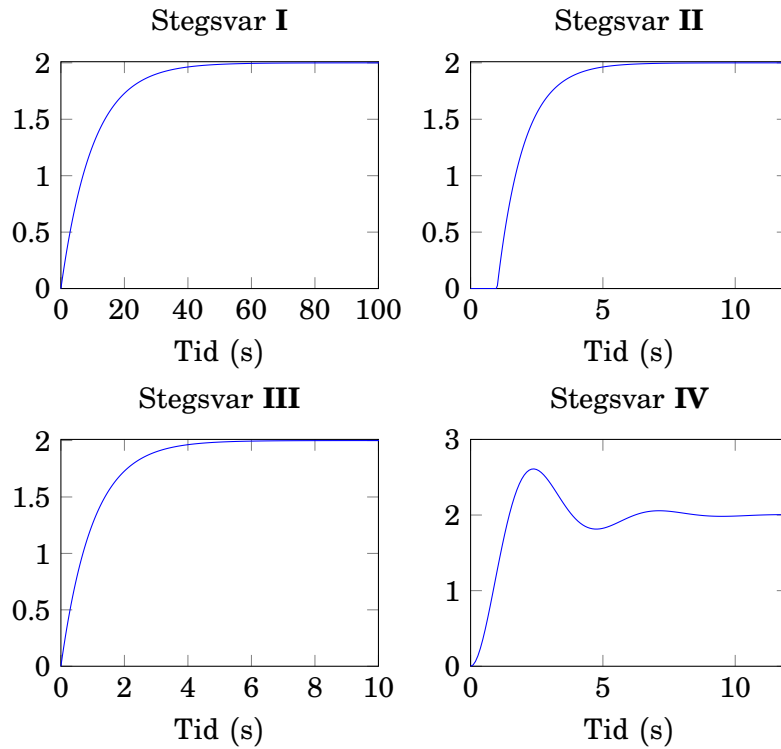
3. I Figur 1 visas Bode-diagrammen för tre olika stabila system benämnda **A**, **B** och **C**.
- Para ihop rätt Bode-diagram med rätt stegsvar i Figur 2. Svaren ska motiveras. (1.5 p)
 - System **A** återkopplas med en P-regulator, $G_R(s) = K$. Bestäm för vilka värden på $K > 0$ som det återkopplade systemet är stabilt. (0.5 p)
 - System **B** återkopplas med en P-regulator, $G_R(s) = K = 1$. Bestäm dödtidsmarginalen för systemet. (1 p)

Solution

- Faskurvan för system **C** visar att systemet har dödtid, därför svarar system **C** mot stegsvar **II**. Eftersom stegsvar **III** är snabbare än stegsvar **I**, måste stegsvar **III** höra ihop med system **A**, då det har högre brytfrekvens och är således snabbare. Svaret är alltså **A** - **III**, **B** - **I**, **C** - **II**.



Figur 1 Bode-diagrammen för de tre olika systemen i uppgift 3.



Figur 2 Stegsvaren för del olika systemen i uppgift 3.

- b.** Då fasen aldrig blir mindre än -90° är det återkopplade systemet stabilt för alla $K > 0$.
- c.** Ifrån Bode-diagrammet fås att $\varphi_m = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ = \frac{105}{360} \cdot 2\pi$ rad vid $\omega_c = 0.2$. Saledes blir döttismarginalen

$$L_m = \frac{\varphi_m}{\omega_c} \approx 9.2 \text{ s.}$$

- 4.** En process beskrivs av

$$G_p(s) = \frac{2}{(s+3)}.$$

- a.** Bestäm processens stegsvar i tidsdomänen, dvs $y(t)$. (1 p)
- b.** Använd Lambda-metoden för att finna en lämplig PI-regulator. Räkna med $\lambda = T$. Svara med överföringsfunktionen för regulatören. (2 p)

Solution

- a.** I Laplace-domänen är sambandet mellan in och ut signal givet av

$$Y(s) = G_p(s)R(s).$$

Då insignalen är ett enhetssteg blir $R(s) = \frac{1}{s}$ och

$$Y(s) = \frac{2}{(s+3)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s(\frac{s}{3} + 1)}$$

Invers Laplace-transform enligt regel 15 i formelsamlingen ger

$$y(t) = \frac{2}{3} (1 - e^{-3t}).$$

- b.** Vi börjar med att bestämma K_p . Eftersom insignalen är ett enhetssteg är $\Delta u = 1$. Då $t = 0$ är $y(t) = 0$ och $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{2}{3}$ (jämför med statiska förstärkningen $G(0)$). Således är $\Delta y = \frac{2}{3}$. Regulatorparametern K kan då bestämmas

$$K = \frac{1}{K_p} \frac{T}{L + \lambda} = \frac{1}{K_p} = \frac{3}{2}$$

För att bestämma T , vill vi veta vilken tid stegsvaret har nått 63% av slutvärdet.

$$\begin{aligned} 0.63 \cdot \frac{2}{3} &= \frac{2}{3} (1 - e^{-3t}) \\ e^{-3t} &= 1 - 0.63 = 0.37 \\ t &= -\frac{\ln 0.37}{3} \approx 0.33. \end{aligned}$$

Således väljs $T_i = 0.33$. Regulatorns överföringsfunktion blir

$$G_R(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{0.33s} \right).$$

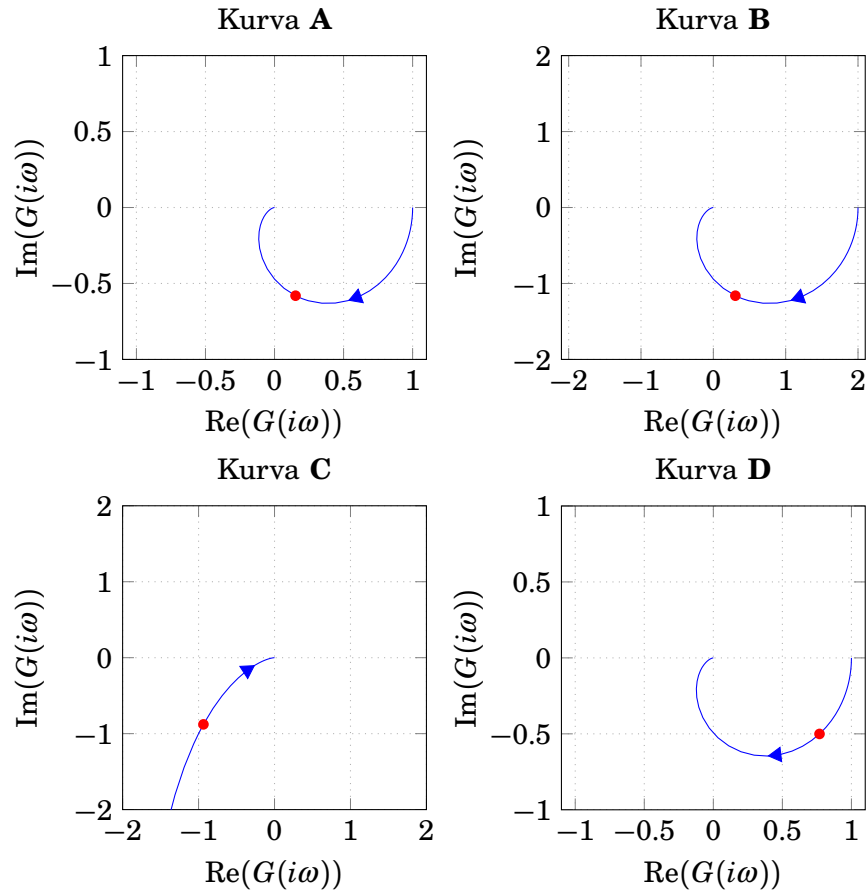
- 5.** Para ihop varje Nyquistkurva (**A**, **B**, **C** och **D**) i Figur 3 med en av överföringsfunktionerna nedan. Observera att frekvensen som motsvarar $\omega = 1$ är markerad med en prick på kurvorna. Svaren ska motiveras.

$$\begin{aligned} G_1(s) &= e^{-2s} \frac{2}{s+1} & G_2(s) &= \frac{12}{(s+3)(s+4)} \\ G_3(s) &= \frac{2}{s(s+1)} & G_4(s) &= \frac{2}{s+0.5} \\ G_5(s) &= \frac{2}{(s+1)(s+2)} & G_6(s) &= \frac{4}{(s+1)(s+2)} \end{aligned}$$

(2 p)

Solution

$G_1(s)$ innehåller en tidsfördröjning, vilket gör Nyquistkurvan spiralformad. Någon sådan kurva finns inte i figuren. $G_4(s)$ har statisk förstärkning 4 och en Nyquistkurva med denna statiska förstärkning förekommer inte heller. $G_3(s)$ innehåller en integrator, vilket gör att fasen inte börjar på noll.



Figur 3 Nyquistkurvorna till uppgift 5. Punkten på kurvan som motsvarar $\omega = 1$ är markerad med en röd pick.

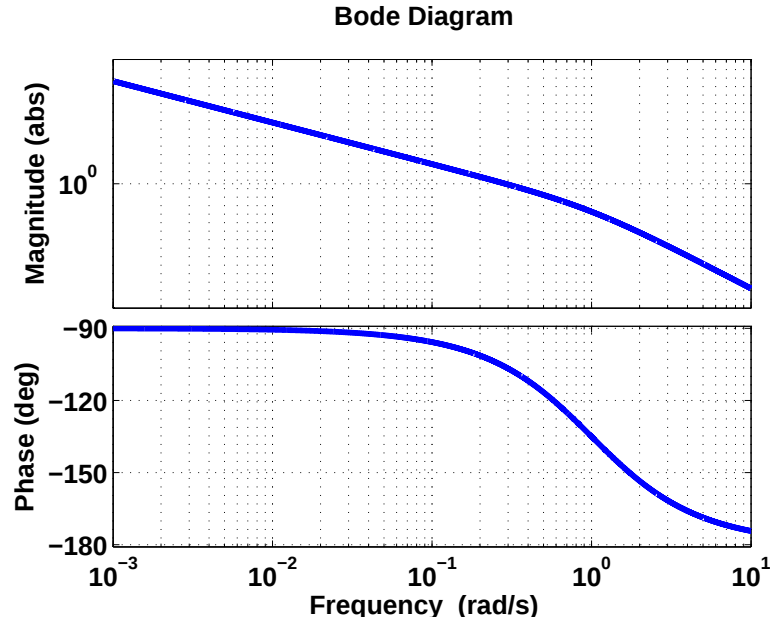
Den enda Nyquistkurva där detta händer, är kurva **C**. $G_6(s)$ har statisk förstärkning 2, vilket endast kurva **B** har. Nu återstår endast $G_2(s)$ och $G_5(s)$. Deras argument fås av

$$\begin{aligned}\arg(G_2(i\omega)) &= -\arctan \frac{\omega}{3} - \arctan \frac{\omega}{4}, \\ \arg(G_5(i\omega)) &= -\arctan \frac{\omega}{1} - \arctan \frac{\omega}{2}.\end{aligned}$$

Genom att sätta in $\omega = 1$ fås $\arg(G_2(i1)) \approx -32^\circ$ och $\arg(G_5(i1)) \approx -72^\circ$. Således svarar **A** mot $G_5(s)$ och **D** mot $G_2(s)$.

Korrekt svar är alltså **A** - $G_5(s)$, **B** - $G_6(s)$, **C** - $G_3(s)$ och **D** - $G_2(s)$.

6. På reglerteknikinstitutionen pågår det just nu mycket forskning om reglering av datormolnsystem. För att spara serverplats vill man kunna allokera minne dynamiskt så att en användare bara får minne om det verkligen behövs. Bodediagrammet för överföringsfunktionen $G(s)$ mellan serverplats och förfrågan om plats från en användardator för ett specifikt fall ges i figur 4. Systemet man tagit fram är dock otillfredställande långsamt. Designa en återkoppling som gör systemet 10 gånger så snabbt utan att försämra robustheten i systemet. Se vidare till att det inte finns något stationärfel vid stegsvar i referensvärdet. (4 p)



Figur 4 Bodediagram för $G(s)$ i problem 6

Solution

Bodeplotten i figur 4 ger skärfrekvensen $\omega_c = 0.3$ och fasmarginal $\phi_m = 74^\circ$. Vi vill ha ett 10 gånger så snabbt system d.v.s. vi vill ha en skärfrekvens om $\omega_c^* = 3$. För att inte minska robustheten i systemet måste vi behålla fasmarginalen. Marginalen vid ω_c^* är enligt bodeplotten ungefär 20° . För att få samma fasmarginal som vi hade vid $\omega_c = 0.3$ behövs därmed ett faslyft om $74 - 20 = 54^\circ$ vid den önskade skärfrekvensen ω_c^* . Notera att vi ser i bodediagrammet att $\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$, d.v.s. vi har en integrator i processen så kravet på stationärfel vid steg kommer alltid att vara uppfyllt. Vi behöver alltså inte någon fasretarderande länk så vi behöver inte ta hänsyn till de extra 6° som införs av en sådan! Inför istället en fasavancerande länk

$$G_k(s) = K_k \frac{1 + s/b}{1 + s/(bN)} \quad (1)$$

Fasavancering om 54° ger $N \approx 7.5$ enligt formelsamling. Vi vill höja fasen precis vid vår önskade skärfrekvens så vi måste ha

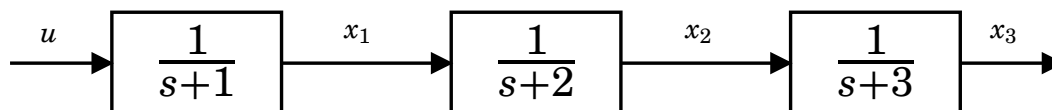
$$b = \frac{\omega^*}{\sqrt{N}} = 1.09. \quad (2)$$

Notera att vi från bodediagrammet får $|G(i\omega^*)| \approx 0.003$. För att se till att vi verkligen får den önskade skärfrekvensen måste vi vidare se till att

$$|G(i\omega^*)||G(i\omega^*)| = K_k \sqrt{N} 0.0033 = 1 \Rightarrow K_k = 12.7 \quad (3)$$

Den fasavancerande länken i (1) ger nu en återkoppling som uppfyller kraven!

7. Ett system som består av tre sammankopplade delsystem kan ses i figur 5.



Figur 5 Systemet i uppgift 7.

- Skriv systemet i figur 5 på tillståndsform $\dot{x} = Ax + Bu$, med de i figuren angivna tillstånden. (2 p)
- Antag att man har tre sensorer och att vi kan mäta samtliga tillstånd. Går det med tillståndsåterkoppling att godtyckligt placera det slutna systemets poler? Motivera ditt svar. (1 p)
- Antag att man vill reglera systemet i figur 5 men att man endast har tillgång till en sensor. Vilken av signalerna x_1, x_2 eller x_3 skall man mäta om man med en observerare vill kunna garantera att man kan skatta tillståndet godtyckligt fort? Motivera ditt val. (2 p)

Solution

- Systemet kan skrivas som

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{s+1}U \\ X_2 &= \frac{1}{s+2}X_1 \\ X_3 &= \frac{1}{s+3}X_2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 + x_1 &= u \\ \dot{x}_2 + 2x_2 &= x_1 \\ \dot{x}_3 + 3x_3 &= x_2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x} = Ax + Bu$$

där

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Det slutna systemets poler kan placeras godtyckligt om och endast om styrbarhetsmatrisen har full rang. Styrbarhetsmatrisen ges av

$$W_s = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinanten av $\det(W_s) = 1 \neq 0$, dvs. styrbarhetsmatrisen har full rang.

- Eftersom endast en sensor är tillgänglig kan vi inte mäta linjärkombinationer av tillstånden. Således finns bara tre möjliga val av C . Dessa är

$$C_1 = [\Delta \quad 0 \quad 0], \quad C_2 = [0 \quad \Delta \quad 0], \quad C_3 = [0 \quad 0 \quad \Delta], \quad \Delta \neq 0. \quad (4)$$

En observerare kan skatta systemets tillstånd godtyckligt fort om systemet är observerbart. Systemet är observerbart om matrisen

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

har full rang. Det enda av de tre möjliga mätsignalerna som uppfyller detta är C_3 för vilken

$$W_o = \begin{bmatrix} C_3 \\ C_3 A \\ C_3 A^2 \end{bmatrix} = \Delta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 9 \end{bmatrix}.$$

De andra möjliga valen av C ger observerbarhetsmatriser som ej har full rang.

8. Ett system ges av

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & a \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 0] x. \end{aligned}$$

- a. Låt $a = 3$, bestäm ett Kalmanfilter för att skatta tillstånden, sådant att polerna placeras i -3 och -5 . Svara med filtret på tillståndsform, där tillstånden $\hat{x}$ är de skattade tillstånden. (2 p)
- b. Hade ett Kalmanfilter fungerat även om a hade varit en godtycklig (reell) konstant? (1 p)

Solution

a. Eftersom

$$\det(A - sI) = (s + 2)(s + 3)$$

har systemet poler i -2 och -3 . Med Kalmanfiltret blir systemmatrisen för det skattade systemet

$$A - KC = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} [1 \quad 0] = \begin{bmatrix} -2 - k_1 & 3 \\ -k_2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Eigenvärdena till matrisen ges av det karakteristiska polynomet

$$\begin{aligned} \det(sI - (A - KC)) &= \begin{vmatrix} s + 2 + k_1 & -3 \\ k_2 & s + 3 \end{vmatrix} = (s + 2 + k_1)(s + 3) + 3k_2 \\ &= s^2 + (5 + k_1)s + 6 + 3k_1 + 3k_2. \end{aligned}$$

Enligt tumregeln bör Kalmanfiltrets poler vara 1.5-2 gånger snabbare än systemets. Vi väljer därför att placera polerna i -3 och -5 . Detta ger oss det önskade karakteristiska polynomet

$$(s + 3)(s + 5) = s^2 + 8s + 15.$$

Jämförelse av koefficienter ger

$$\begin{aligned} s^1 : \quad & 5 + k_1 = 8 \\ s^0 : \quad & 3k_1 + 3k_2 + 6 = 15. \end{aligned}$$

Således ger $k_1 = 3$ och $k_2 = 0$ det önskade Kalmanfiltret som på tillståndsform blir

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} y.$$

- b.** Systemet måste vara observerbart för att ett Kalmanfilter skall fungera. Genom att ställa upp observerbarhetsmatrisen

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & a \end{bmatrix}$$

ser vi att systemet är observerbart då

$$\det(W_o) = a \neq 0.$$

Således fungerar det att skatta tillstånden med ett Kalman-filter för alla $a \neq 0$.