

Föreläsning 15 — Repetition

- Modellbygge
- Analys
- Syntes

Modellbygge — Linjärisering

1. Bestäm stationär punkt (y_0, u_0)
2. Linjärisera

Exempel:

$$\text{Olinjär ekvation} \quad 0 = \dot{x} - u \cdot x + 1$$

$$\text{Stationär punkt} \quad 1 = x_0 \cdot u_0$$

$$\text{Nya variabler} \quad \begin{cases} \Delta x = x - x_0 \\ \Delta u = u - u_0 \end{cases}$$

$$\text{Linjäriserad ekvation} \quad \frac{d}{dt} \Delta x = u_0 \cdot \Delta x + x_0 \cdot \Delta u$$

Insignal/utsignal-modeller

- Impulssvars-analys $u(t) = \delta(t)$
- Stegvars-analys $u(t) = \theta(t)$
- Frekvenssvars-analys

$$\begin{cases} u(t) = u_0 \sin \omega t \\ y(t) = u_0 |G(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G(i\omega)) \end{cases}$$

Representeras i Bode- eller Nyquist-kurvor

Även andra identifieringsmetoder finns

Resultat av modellbygge

- Tillståndsbeskrivning $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$
- Överföringsfunktion

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = K \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)}$$

- Frekvenskurvor $G(i\omega)$ (Nyquist, Bode)
- Stegsvär

Analys

Stabilitet

- polers läge — rotort
- karakteristiska polynomet
- Nyquistkriteriet — Argumentvariationsprincipen

Stabilitetsmarginal

- Amplitud- och fasmarginal
- Känslighetsfunktion

Stationärt fel

- stegsvar, rampsvar
- integratorers betydelse

Polers läge — singularitetsdiagram

Karakteristiskt polynom för andra ordningens system

$$s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$$

där ω mäter snabbhet och ζ mäter relativ dämpning.

För högre ordningens system skrivs polynomet

$$(s + a)(s^2 + 2\zeta_1\omega_1s + \omega_1^2) \cdots (s^2 + 2\zeta_n\omega_ns + \omega_n^2)$$

Rotort

Öppet system

$$G_o = \frac{k}{s(s+2)}$$

Slutet system

$$G_t = \frac{G_o}{1 + G_o} = \frac{k}{s^2 + 2s + k}$$

Poler—rotort

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - k}$$

Stabilitet—karakteristiska polynomet

Antag $a_0 > 0$.

Rötterna till polynomet $a_0s^2 + a_1s + a_2$ ligger i vänstra halvplanet om och endast om **alla koefficienter är positiva**

Rötterna till polynomet $a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3$ ligger i vänstra halvplanet om och endast om **alla koefficienter är positiva** och dessutom

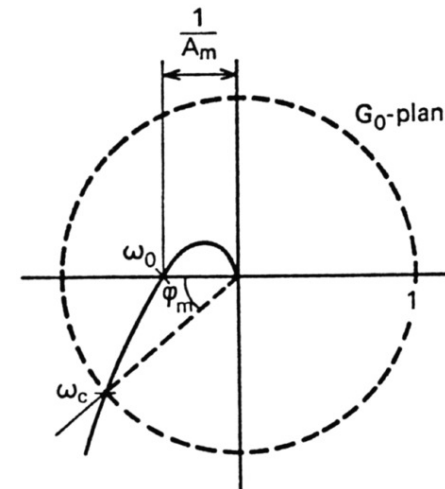
$$a_1a_2 - a_0a_3 > 0$$

Nyquistkriteriet

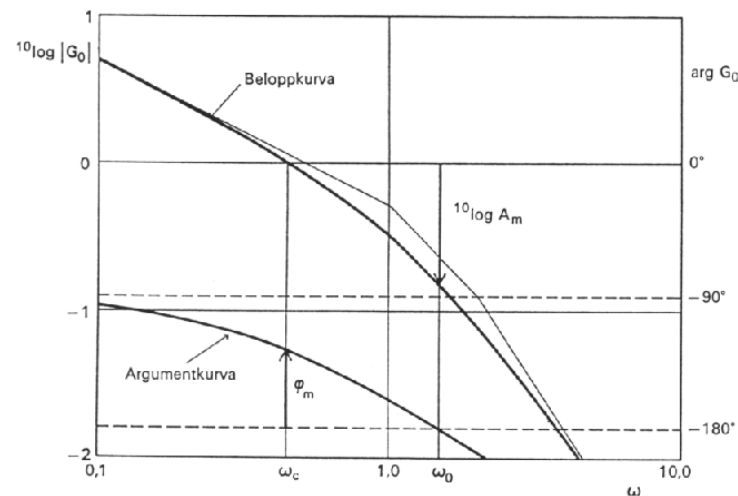
Om $G(s)$ stabil, så är $[1 + G(s)]^{-1}$ stabil om och endast om Nyquistkurvan $G(i\omega)$ inte omcirklar -1 .

Skillnaden mellan antalet instabila poler i $G(s)$ och antalet instabila poler i $[1 + G(s)]^{-1}$ är lika med antalet varv som Nyquistkurvan går runt -1 .

Förstärkningsmarginal A_m och Fasmarginal φ_m



Stabilitetsmarginaler i Bodediagrammet



Stationärt fel — Slutvärdessatsen

Låt $E(s)$ vara Laplacetransformen av $e(t)$. Om alla poler till $sE(s)$ har negativ realdel så gäller

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

Begynnelsevårdessatsen

Vidare gäller

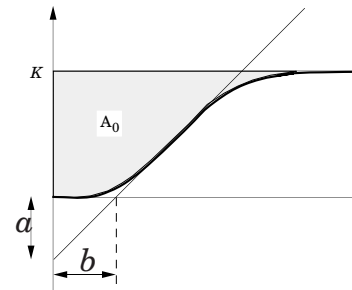
$$\lim_{t \rightarrow 0} e(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sE(s)$$

förutsatt att gränsvärdet existerar.

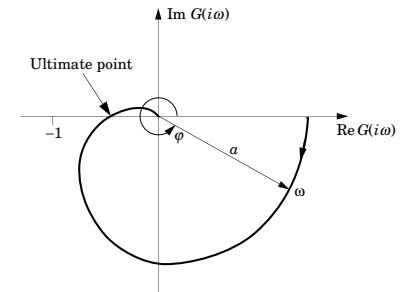
Syntes

- PID — Ziegler/Nichols
- Polplacering
- Kompensering i frekvensplanet
- Tillståndsåterkoppling/Rekonstruktion

Ziegler-Nichols' stegsvarsmetod



Ziegler-Nichols' frekvenssvarsmetod



Kompensering i frekvensplanet

Välj kompenseringslänken $G_K(s)$ så att $G_o(s)G_K(s)$ uppfyller specifikationerna för öppna systemet.

Fasretarderande länk

$$G_K(s) = \frac{s+a}{s+a/M} \quad \text{minskar statiskt fel}$$

Fasavancerande länk

$$G_K(s) = KN \frac{s+b}{s+bN} \quad \text{för snabbhet, stabilitet}$$

Tillståndsåterkoppling/Rekonstruktion

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Kalmanfilter

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + K(y - \hat{y})$$

Återkoppling $u = -L\hat{x} + l_{\text{ref}} r$ ger slutna systemet

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BL & BL \\ 0 & A - KC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bl_{\text{ref}} \\ 0 \end{bmatrix} r$$

Styrbarhet/Observerbarhet

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$W_s = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Exempel

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 1] x \end{cases}$$

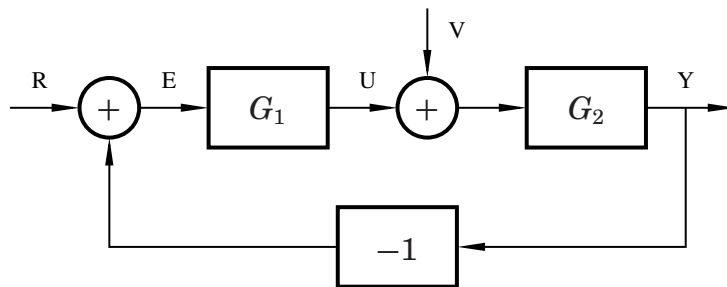
$$W_s = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Styrbara underrummet spänns upp av B : x_2 ej styrbar

Observerbara underrummet spänns upp av C : x_1 ej observerbar

Pol-nollställesförkortningar



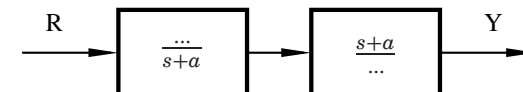
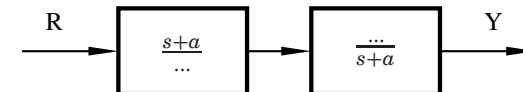
$$Y = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} R + \frac{G_2}{1 + G_1 G_2} V$$

Vad händer om vi har en pol-nollställesförkortning i $G_1 G_2$?

Exempel: Om man förkortar långsam processpol syns den ej i $G_{r \rightarrow y}$ men märks vid laststörning.

Vad är skillnaden på följande pol-nollställesförkortningar m a p observerbarhet och styrbarhet?

Kom ihåg: nollställen blockerar "viss signal". (Vilken?)



Då man tappat observerbarhet eller styrbarhet sker det pol-nollställesförkortningar.

Exempel:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 1] x \end{cases}$$

Vi såg innan att ett tillstånd ej var observerbart och det andra ej styrbart.

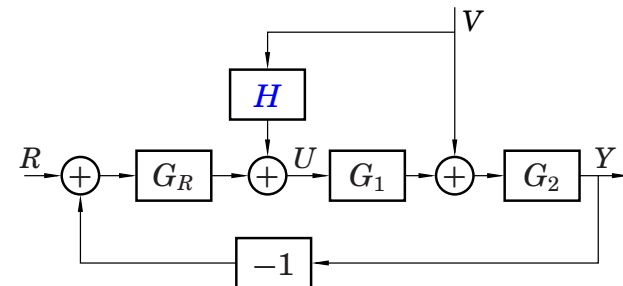
$$\begin{aligned} Y &= C(sI - A)^{-1}B = \\ &= [0 \quad 1] \left(\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 0!! \end{aligned}$$

Exempel: Återkoppling via Kalman-filtrer

Finns n tillstånd i process och n i regulatorn ($n + 1$ om extra integraldel tas med) men de n tillstånden i Kalman-filtret syns ej i $G_{R \rightarrow Y}$

Framkoppling

Antag mätbar störning v . Hur tar man bäst bort dess inverkan?



$$y = G_2 G_1 u + G_2 (v + G_1 H v)$$

Idealt vore $H = -\frac{1}{G_1}$

Anm: Kan vara omöjligt eller ej önskvärt att realisera $H = -\frac{1}{G_1}$