1.

a. Vi har att
$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{s+1}{s^2+s+2}.$$

b. Ett nollställe i -1 och poler i $-0.5 \pm i\sqrt{7}/2$. Alla poler ligger i vänster halvplan alltså är systemet är stabilt.

c. Den sökta amplituden är amplituden hos insignalen gånger systemets förstärkning för frekvensen för sinussignalen, dvs $\omega = 5$.

$0.1|G(5i)| = 0.1\frac{|1+5i|}{|(5i)^2+5i+2|} \approx 0.022$

2.

a.
$$L = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad l_r = 2$$

b. Om polerna placeras långt från origo så blir elementen i L stora. Detta kan leda till att variationerna i $u = -Lx + l_r r$ blir stora och att u därför begränsas genom mättning. Regleringen blir därmed inte vad man förväntat sig vid polplaceringen.

3.

a. Inför tillstånden $x_1 = z$ och $x_2 = \dot{z}$. Detta ger:
$$\dot{x_1} = \dot{z} = x_2 = f_1(x_1, x_2, u)$$
$$\dot{x_2} = \ddot{z} = -\dot{z}\sqrt{z} - z + \sin(u) = -x_2\sqrt{x_1} - x_1 + \sin(u) = f_2(x_1, x_2, u)$$
$$y = z + \dot{z} = x_1 + x_2 = g(x_1, x_2, u)$$

b. Vid en stationär punkt gäller att:
$$\dot{x_1} = 0 = x_2^0$$
$$\dot{x_2} = 0 = -x_2^0\sqrt{x_1^0} - x_1^0 + \sin(u^0)$$

De stationära punkterna ges således av $(\sin(t), 0, t)$

Den stationära punkten med $u^0 = \frac{\pi}{4}$ ges av
$$x_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2^0 = 0, \quad u^0 = \frac{\pi}{4}$$

Taylorutveckla f och g runt (x_1^0, x_2^0, u^0). Behåll bara första ordningens termer.

Med de nya variablerna
$$\Delta x = \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ x_2 - x_2^0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= u - u^0 \\
\Delta y &= y - y^0
\end{aligned}
$$

fås det linjäriserade systemet

$$
\begin{aligned}
\Delta\dot{x} &= A\Delta x + B\Delta u \\
\Delta y &= C\Delta x
\end{aligned}
$$

där:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}\Bigg|_{x^0,\ u^0} \\
B &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{pmatrix}\Bigg|_{x^0,\ u^0} \\
C &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix}\Big|_{x^0,\ u^0}
\end{aligned}
$$

Med $x_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, x_2^0 = 0, u^0 = \frac{\pi}{4}$ fås:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{pmatrix} \\
B &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
C &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

4.

a. System 4 är tidsfördröjt då fasförskjutningen ökar med frekvensen.

b. System 3 har ett nollställe i vänster halvplan, systemet 'bryter uppåt' vid 1 rad/s.

c. System 4 blir instabilt, förstärkning är större än samtidigt som fasförskjutningen är större än 180 grader.

d. System 1 är oscillativt, det är en typisk andra ordningens process med komplexkonjugerade poler.

e. System 2 innehåller en integrator, inledande lutning är negativ och fasen börjar på minus 90.

f. System 1, 2 och 4 har lågpasskaraktär, då de förstärker på låga frekvenser och förstärkningen går mot noll för höga.

5.

a. Polerna ges av rötterna till det karakteristiska polynomet

$$
\begin{aligned}
&s^2 + 0.2s + 1.01 = 0 \Rightarrow \\
&s = -0.1 \pm i
\end{aligned}
$$

Systemets egenfrekvens och dämpning erhålls genom att jämföra systemets karakteristiska polynom med

$$s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2.$$

Detta ger

$$
\begin{aligned}
\omega^2 &= 1.01 \Leftrightarrow \omega \approx 1.005 \\
2\zeta\omega &= 0.2 \Leftrightarrow \zeta \approx 0.1
\end{aligned}
$$

b. Om systemet regleras med en P-regulator ges det slutna systemets överföringsfunktion av

$$G = \frac{KG_p}{1 + KG_p} = \frac{K}{s^2 + 0.2s + 1.01 + K}.$$

Således kan den relativa dämpningen ζ inte påverkas vid P-reglering.

c. För att godtyckligt kunna placera polerna och därmed uppfylla specifikationerna krävs t.ex. en PD-, PID-regulator eller ett Kalmanfilter i kombination med tillståndsåterkoppling.

6.

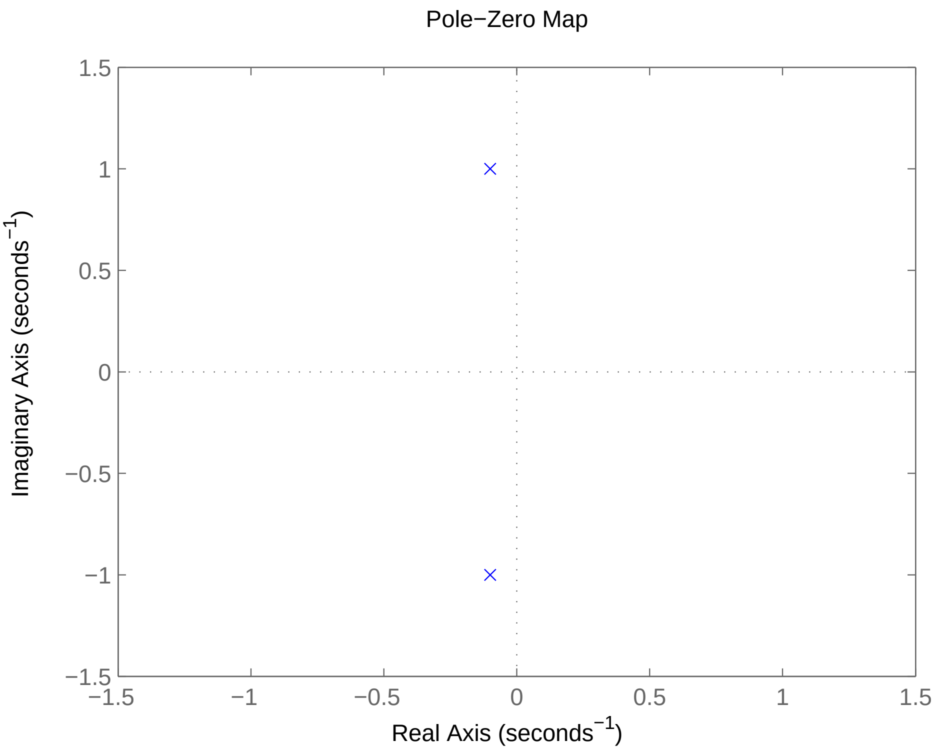
a. Felet blir

$$E(s) = \frac{1}{1 + KG_p(s)} R(s) = \frac{s^2 + 20s}{s^2 + 20s + 10K} R(s).$$

Slutvärdessatsen (stabilt!) ger

$$sE(s)\frac{4}{s}\bigg|_{s=0} = 0.$$

Steget har storlek 4 då vi går från fokus på 1 meters avstånd till 5.



Figur 1 Singularitetsdiagram för uppgift 7

b. Med en ramp som insignal

$$sE(s)\frac{3}{s^2}\bigg|_{s=0} = \frac{60}{10K} = \frac{6}{K}.$$

c. Ja, med två integratorer i kretsöverföringsfunktionen kan man följa ramper utan stationärt fel.

7. Det tredje kravet innebär att regulatorn måste ha en integraldel. Låt oss därför börja med att ansätta en PI-regulator med $K = 1$ och $T_i = 1$, dvs. $G_r = 1 + \frac{1}{s} = \frac{s+1}{s}$. Valet av K och T_i har gjorts helt godtyckligt och regulatorn uppfyller förmodligen inte krav 1 och 2. Men nu kan regulatorn kompletteras med en kompenseringslänk.

Den önskade skärfrekvensen är $\omega_c = 6$ rad/s och vid denna frekvens kan fasmarginalen beräknas till

$$\varphi_m = \pi + \arg G_0(i\omega_c)$$

$$\arg G_0(i\omega_c) = \arg \frac{5}{(i\omega_c + 2)^2}\frac{i\omega_c + 1}{i\omega_c} =$$

$$= \arg 5 + \arg(i\omega_c + 1) - 2\arg(i\omega_c + 2) - \arg(i\omega_c) =$$

$$= 0 + \arctan(\omega_c/1) - 2\arctan(\omega_c/2) - \frac{\pi}{2} \approx -2.66 \text{ rad}$$

$$\varphi_m = \pi + \arg G_0(i\omega_c) = \pi - 2.66 \approx 0.48 \text{ rad} \approx 27°$$

För att nå den önskade fasmarginalen på 50° måste alltså fasen lyftas 23°. Detta kan åstadkommas med en fasavancerande kompenseringslänk:

$$G_K(s) = K_K N \frac{s+b}{s+bN}$$

$N = 2.5$ ger ett faslyft på ungefär 25° och blir ett bra val. Parametern b ska nu väljas så att faskurvans topp hamnar vid skärfrekvensen, enligt

$$\omega_c = b\sqrt{N} \quad \Rightarrow \quad b = \omega_c/\sqrt{N} \approx 3.8$$

Slutligen ska länkens förstärkning K_K väljas så att $\omega_c = 6$ rad/s verkligen blir skärfrekvens, dvs.

$$1 = |G_K(i\omega_c)G_r(i\omega_c)G(i\omega_c)|$$

$$1 = K_K\sqrt{N}\left|\frac{i\omega_c + 1}{i\omega_c}\right|\left|\frac{5}{(i\omega_c+2)^2}\right| = K_K\sqrt{N}\frac{5\sqrt{\omega_c^2+1}}{(\omega_c^2+4)\cdot\omega_c}$$

$$K_K = \frac{(\omega_c^2+4)\cdot\omega_c}{5\sqrt{N}\sqrt{\omega_c^2+1}} \approx 5.0$$

Den sökta kompenseringslänken ska alltså ha överföringsfunktionen

$$G_K(s) = 5\cdot 2.5\frac{s+3.8}{s+3.8\cdot 2.5} = 12.5\frac{s+3.8}{s+9.5}$$

Den slutliga regulatorn som ska användas är

$$G_{final} = G_r G_K = \frac{s+1}{s}\cdot 12.5\frac{s+3.8}{s+9.5} = 12.5\frac{(s+1)(s+3.8)}{s(s+9.5)}$$