LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
Lunds universitet

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 20-10-2011 kl 8.00-13.00

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift. Preliminära betygsgränser:

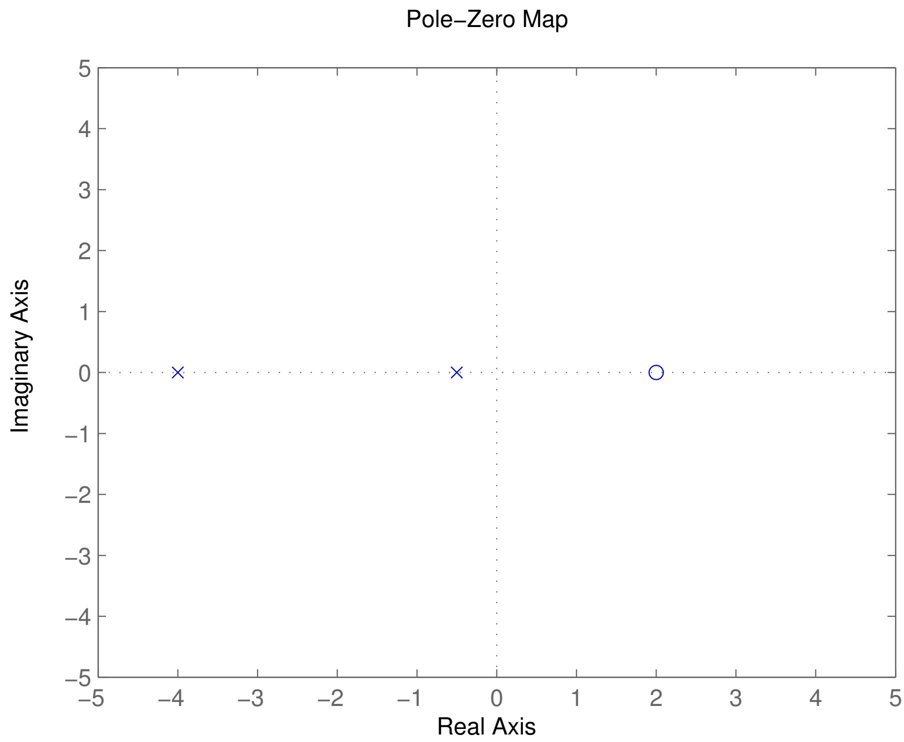
Betyg 3: 12 poäng
4: 17 poäng
5: 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet anslås onsdag 2/11 på institutionens anslagstavla på första våningen i Maskinhuset samt på institutionens hemsida. Visning samma dag kl 12.00–12.30 i labbet på första våningen.



Figur 1 Singularitetsdiagram för systemet (1)

Lösningar till tentamen 20-10-2011 kl 8.00-13.00

1. Ett system har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{6}{s^2 + 4.5s + 2} - \frac{2}{2s + 1}.$$

a. Beräkna systemets poler och nollställen och sätt ut dessa i ett singularitetsdiagram. (1.5 p)

b. Är systemet asymptotisk stabilt, stabilt eller instabilt? Motivera. (0.5 p)

Solution

a. Systemet (1) kan skrivas som

$$G(s) = \frac{6}{s^2 + 4.5s + 2} - \frac{2}{2s + 1} = \frac{-s + 2}{(s + 4)(s + 1/2)}$$

Polerna ligger i $s = -4$ och $s = -0.5$. Nollstället ligger i $s = 2$.

b. Systemet är assymptotiskt stabilt eftersom samtliga poler för systemet ligger i vänster halvplan.

2. Pelle får i uppgift att bestämma en tillståndsbeskrivning för differentialekvationen

$$\ddot{y} + 3\dot{y} - 5\dot{u} = 7y + u$$

Pelle ser att det är en andra ordningens differentialekvation och inser därför att han behöver två tillstånd, och ansätter

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \end{cases}$$

Genom detta val kommer han slutligen fram till beskrivningen

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \dot{u} \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

a. Pelle har tyvärr gjort lite fel, vad? (1 p)

b. Hjälp Pelle att ta fram en korrekt tillståndsbeskrivning. (1 p)

Solution

a. Pelle har gjort två fel: Det viktigaste är att en tillståndsbeskrivning ska vara på formen

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{1}$$

Detta är uppenbart inte fallet för beskrivningen i uppgiften.

Det andra felet Pelle gjort är att 7an och -3an i A-matrisen ska byta plats.

b. Ett rättframt sätt att få fram en tillståndsbeskrivning är att gå omvägen via överföringsfunktionen. Laplacetransformeras diff. ekvationen erhålls

$$s^2Y(s) + 3sY(s) - 5sU(s) = 7Y(s) + U(s) \tag{2}$$

$$Y(s) = \frac{5s+1}{s^2+3s-7}U(s) \tag{3}$$

$$G(s) = \frac{5s+1}{s^2+3s-7} \tag{4}$$

Genom att t.ex. använda formeln för en observerbar kanonisk form fås tillståndsbeskrivningen

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \tag{5}$$

3. Stegsvaret för ett system ges av tidsfunktionen

$$y(t) = 2(1 - e^{-3t})$$

Bestäm systemets överföringsfunktion. (2 p)

Solution

Laplace-transformen av insignalen (ett steg) ges av

$$U(s) = \frac{1}{s}, \tag{6}$$

och Laplace-transformen av utsignalen ges av

$$Y(s) = 2\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+3}\right) = \frac{2(s+3-s)}{s(s+3)} = \frac{6}{s(s+3)} \tag{7}$$

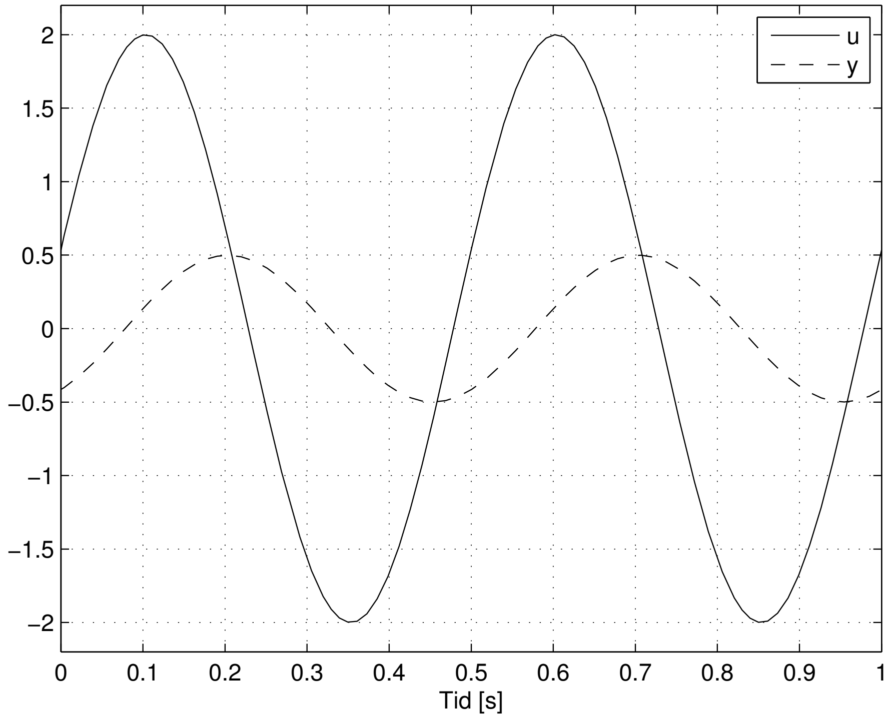
Överföringsfunktionen ges av förhållandet mellan utsignal och insignal enligt

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{6}{s(s+3)}}{\frac{1}{s}} = \frac{6}{s+3}. \tag{8}$$

4. Insignal och utsignal från ett system med överföringsfunktion enligt

$$G(s) = \frac{b}{s+a}$$

är givet i figur 2 (se nästa sida). Bestäm modellparametrarna a och b. (2 p)



Figur 2 Insignal $u(t)$ och utsignal $y(t)$ för systemet i uppgift 4.

Solution

I figuren ser man att avståndet mellan två toppar är 0.5 s (dvs. periodtiden $T = 0.5$ s), vilket ger vinkelfrekvensen $\omega = \frac{2\pi}{T} = 4\pi$ rad/s. Vidare kan man läsa av att amplituden på utsignalen är en fjärdedel av amplituden på insignalen, och överföringsfunktionens förstärkning är därför 0.25. Slutligen kan även förskjutningen mellan in- och utsignal läsas av till 0.1 s, vilket ger fasförskjutningen $\varphi = \omega \cdot 0.1 = 0.4\pi$, eftersom utsignalen ligger efter insignalen kommer fasförskjutningen att vara negativ.

Då en sinussignal skickas in till ett linjärt och tidsinvariant system kommer utsignalen också att vara en sinussignal med samma frekvens, men med amplituden $|G(i\omega)|A_0$ om amplituden på insignalen är A_0, insignalen har vinkelfrekvensen ω och systemet har överföringsfunktionen $G(s)$. Utsignalen kommer dessutom att ha fasförskjutningen $\arg G(i\omega)$.

För överföringsfunktionen gäller (9) och (10) vid vinkelfrekvensen $\omega = 4\pi$ rad/s:

$$|G(i4\pi)| = \frac{b}{\sqrt{(4\pi)^2 + a^2}} \tag{9}$$

$$\arg G(i4\pi) = -\arctan\left(\frac{4\pi}{a}\right) \tag{10}$$

Den från figuren uppmätta fasförskjutningen tillsammans med (10) ger (11). Parametern a kan då räknas ut enligt (12).

$$-0.4\pi = -\arctan\left(\frac{4\pi}{a}\right) \tag{11}$$

$$a = \frac{4\pi}{\tan(0.4\pi)} \approx 4.1 \tag{12}$$

Den uppmätta förstärkningen tillsammans med (9) ger (13). Parametern b kan då räknas ut enligt (14).

$$0.25 = \frac{b}{\sqrt{(4\pi)^2 + a^2}} \tag{13}$$

$$b = 0.25\sqrt{(4\pi)^2 + a^2} \approx 3.3 \tag{14}$$

5. Vilka av följande påståenden är korrekta? Korta motiveringar krävs för poäng.

a. Polerna för ett linjärt dynamiskt system är lika med egenvärdena för systemets A-matris i kvadrat. (0.5 p)

b. Om du vill minska det stationära felet för ett reglerat system är det lämpligt att införa en fasretarderande kompenseringslänk. (0.5 p)

c. $G(s) = \frac{s^2+7s-5}{s^3+as^2+2s+9}$ är stabil för $0 < a < 5$. (0.5 p)

d. Amplitudmarginalen för ett system är alltid lika med sinus av fasmarginalen. (0.5 p)

e. När regulatorn $G_R(s) = \frac{s^2+6s+5}{s^2}$ styr processen $G_P(s) = \frac{3}{s+2}$ kan det slutna systemet följa referensen $r(t) = t, t \geq 0$ utan något stationärt fel. Det slutna systemet är stabilt. (0.5 p)

f. Slutvärdesteoremet kan tillämpas på alla system för att t.ex. bestämma stationär förstärkning. (0.5 p)

Solution

a. Falskt. Polerna för ett linjärt dynamiskt system är lika med egenvärdena för systemets A-matris.

b. Sant. Med en fasretarderande kompenseringslänk höjs förstärkningen för låga frekvenser och därmed minskas stationära fel.

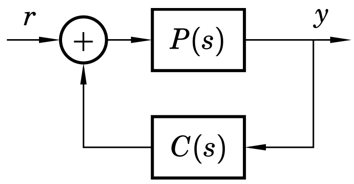
c. Falskt. Med stabilitetsvillkoret för en tredje ordningens överföringsfunktion ges att $G(s)$ är stabil för $a > 4.5$.

d. Falskt. Det råder inget direkt samband mellan amplitudmarginalen och fasmarginalen.

e. Sant. Eftersom det slutna systemet blir stabilt (kontrolleras lätt genom att beräkna ut det slutna systemets överföringsfunktion) och det öppna systemet har två stycken integratorer kan rampreferenser följas utan stationära fel.

f. Falskt. För att slutvärdesteoremet ska gälla måste $sY(s)$ vara asymptotiskt stabil, om det är tidsvaret för $Y(s) = G(s)U(s)$ man vill undersöka slutvärdet för.

6. Betrakta systemet vars blockschema är givet i figur 3.



Figur 3 Blockschema för systemet i uppgift 6.

a. Vad blir överföringsfunktionen från r till y? (1 p)

b. Anta att processens överföringsfunktion $P(s)$ är given enligt

$$P(s) = \frac{1}{s+1}$$

Designa en regulator $C(s)$ så att det slutna systemets överföringsfunktion blir 1. (1 p)

c. Varför kan det vara svårt att rent praktiskt använda regulatorn designad i föregående uppgift? (1 p)

Solution

a. Överföringsfunktionen $G(s)$ från r till y för blockschemat i Figur 3 ges av (15).

$$G(s) = \frac{P(s)}{1 - P(s)C(s)} \tag{15}$$

b. Överföringsfunktionen ges nu av (16).

$$G(s) = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 - \frac{1}{s+1}C(s)} = \frac{1}{s+1-C(s)} \tag{16}$$

Väljs $C(s) = s$ erhålls det önskade slutna systemet.

c. Att välja $C(s) = s$ innebär i tidsplanet en ren derivering, vilket inte brukar vara så bra att implementera p.g.a. den stora bruskänsligheten.

7. Ett system är givet på tillståndsform enligt

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

a. Kan man med tillståndsåterkoppling godtyckligt placera det slutna systemets poler? (1 p)

b. Bestäm en tillståndsåterkoppling så att det slutna systemet får samtliga poler i $s = -3$. Antag att alla tillstånd kan mätas. (2 p)

c. Antag nu att det endast är möjligt att mäta utsignalen y. Är det möjligt att ta fram ett Kalmanfilter så att skattningsfelen avtar godtyckligt snabbt? Vad är en lämplig polplacering för systemet i denna uppgift? (OBS. inget Kalmanfilter behöver beräknas) (1 p)

Solution

a. Att det ska vara möjligt att placera det slutna systemets poler godtyckligt är ekvivalent med att systemet är styrbart. Styrbarhetsmatrisen ges av (17).

$$W_s = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Villkoret för styrbarhet är att W_s ska ha full rang, och det enklaste sättet att konstatera att så är fallet är att beräkna determinanten, i det här fallet blir den -1 och eftersom den är skild från 0 har W_s full rang och systemet är styrbart.

b. Vid tillståndsåterkoppling används styrlagen $u = -Lx$, där $L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix}$. Det slutna systemets poler ges av egenvärdena till matrisen $A - BL$, och dessa kan placeras genom att välja l_1 och l_2. Egenvärdena genom att lösa den karaktäristiska ekvationen (18).

$$\begin{aligned} \det(sI - (A - BL)) &= \left| s\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} \right) \right| = \\ &= \left| \begin{pmatrix} s & -1 \\ l_1 & s+2+l_2 \end{pmatrix} \right| = s^2 + (2 + l_2)s + l_1 = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

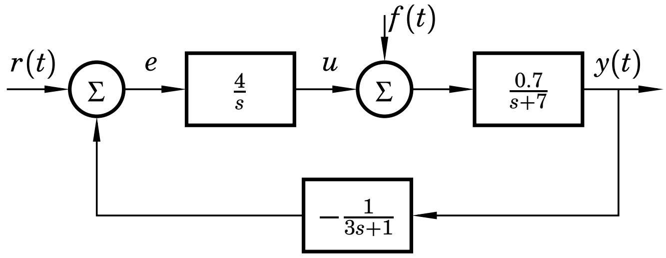
Att polerna för slutna systemet ska hamna i $s = -3$ innebär att den karaktäristiska ekvationen ska se ut enligt $(s+3)^2 = s^2 + 6s + 9 = 0$. Jämförelse med (18) ger då att $l_1 = 9$ och $l_2 = 4$.

c. För att det ska vara möjligt att konstruera ett Kalmanfilter där skattningsfelen avtar godtyckligt snabbt måste systemet vara observerbart. Detta undersöks genom att beräkna rangen för observerbarhetsmatrisen (19). Determinanten för W_o är 1 och därmed har den full rang och systemet är observerbart.

$$W_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Polerna för Kalmanfiltret bör väljas snabbare än de för regulatorn, och en lämplig placering kan därför vara att placera dem båda i $s = -6$.

8. Bektrakta systemet givet i figur 4. Vad blir det stationära felet för systemet när insignalerna $r(t)$ och $f(t)$ båda är steg? (3 p)



Figur 4 Blockdiagram för systemet i uppgift 8.

Solution

Felet för systemet ges av

$$E(s) = \frac{s(s+7)(3s+1)}{s(s+7)(3s+1)+0.28}R(s) - \frac{0.7s}{s(s+7)(3s+1)+0.28}F(s) \qquad (20)$$

Laplace-transformen av insignalerna blir båda $\frac{1}{s}$, och det stationära felet ges av $e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = 0$ (för asymptotiskt stabila system). Felet blir i detta fallet noll.

9. Nils är ny på jobbet som reglertekniker och får som första uppdrag att förbättra regleringen av ett rullband. Den nuvarande regulatorn har länge ansetts vara lite för långsam, dvs. att den inte följer referensvärdet tillräckligt snabbt. Försök har gjorts för att justera parametrarna i den nuvarande regulatorn, en PI-regulator, men har endast resulterat i ett dåligt dämpat system.

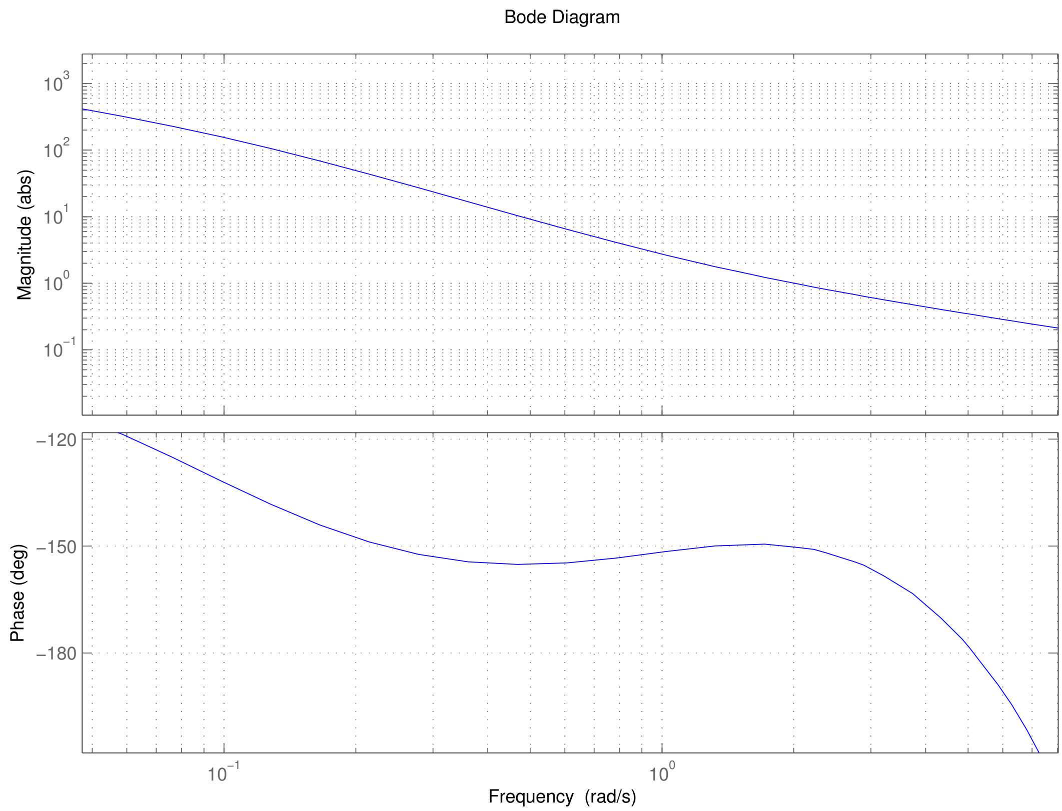
Nils tänker förbättra regleringen genom att använda en lämplig kompenseringslänk, men inser att han behöver ett bodediagram för det öppna systemet.

a. Rullbandet är en stabil process. Ge ett förslag på experiment som Nils kan göra för att få sitt bodediagram. (1 p)

Nils lyckas till slut få fram ett bodediagram, se figur 5, men när han ska designa sin kompenseringslänk drabbas han av en blackout och är därför i desperat behov av din hjälp.

Nils chef har sagt att snabbheten på systemet ska tredubblas (dvs. att systemets skärfrekvens ska bli 3 gånger så stor) utan att fasmarginalen förändras.

b. Designa en kompenseringslänk som uppfyller chefens specifikationer. (3 p)



Figur 5 Bodediagram för det öppna systemet i uppgift 9.

Solution

a. Han kan t.ex. skicka sinussignaler med varierande frekvens till systemet och mäta amplitud (ger bodediagrammets amplitudkurva) och fasförskjutning (ger bodediagrammets faskurva) på utsignalen.

b. Den nuvarande skärfrekvensen kan i bodediagrammet läsas av till 2 rad/s och den nuvarande fasmarginalen till 30°. Den nya skärfrekvensen ska vara 3 gånger så stor som den gamla, den ska alltså vara 6 rad/s. Vid den nya skärfrekvensen har det öppna systemet en fasförskjutning på ungefär -190°, vilket innebär att kompenseringslänken måste ge ett faslyft på 40° för att fasmarginalen ska förbli oförändrad.

Eftersom skärfrekvensen ska ökas är det en fasavancerande kompenseringslänk som ska användas:

$$G_K(s) = K_K N \frac{s+b}{s+bN} \tag{21}$$

Ett faslyft på 40° motsvaras då av parametern $N \approx 4.5$. Faskurvans topp vill vi ska hamna på den nya skärfrekvensen, och parametern b kan då väljas enligt $b = \frac{\omega_c^{ny}}{\sqrt{N}} = 6/\sqrt{4.5}$. Slutligen ska K_K väljas så att förstärkningen vid den nya skärfrekvensen verkligen blir 1, dvs. (förstärkningen för det öppna systemet för frekvensen $\omega_c^{ny} = 6$ rad/s läses av till $|L(6i)| \approx 0.3$, där L betecknar det öppna systemet):

$$|G_K(i\omega_c^{ny})L(i\omega_c^{ny})| = 1 \tag{22}$$

$$K_K\sqrt{N}|L(6i)| = 1 \tag{23}$$

$$K_K\sqrt{4.5}\cdot 0.3 = 1 \tag{24}$$

$$K_K = 1/(0.3\sqrt{4.5}) \tag{25}$$

Kompenseringslänken ges alltså av:

$$G_K(s) = 1/(0.3\sqrt{4.5})\cdot 5\frac{s+6/\sqrt{4.5}}{s+6/\sqrt{4.5}\cdot 4.5} \approx 7.07\cdot\frac{s+2.83}{s+12.73} \tag{26}$$