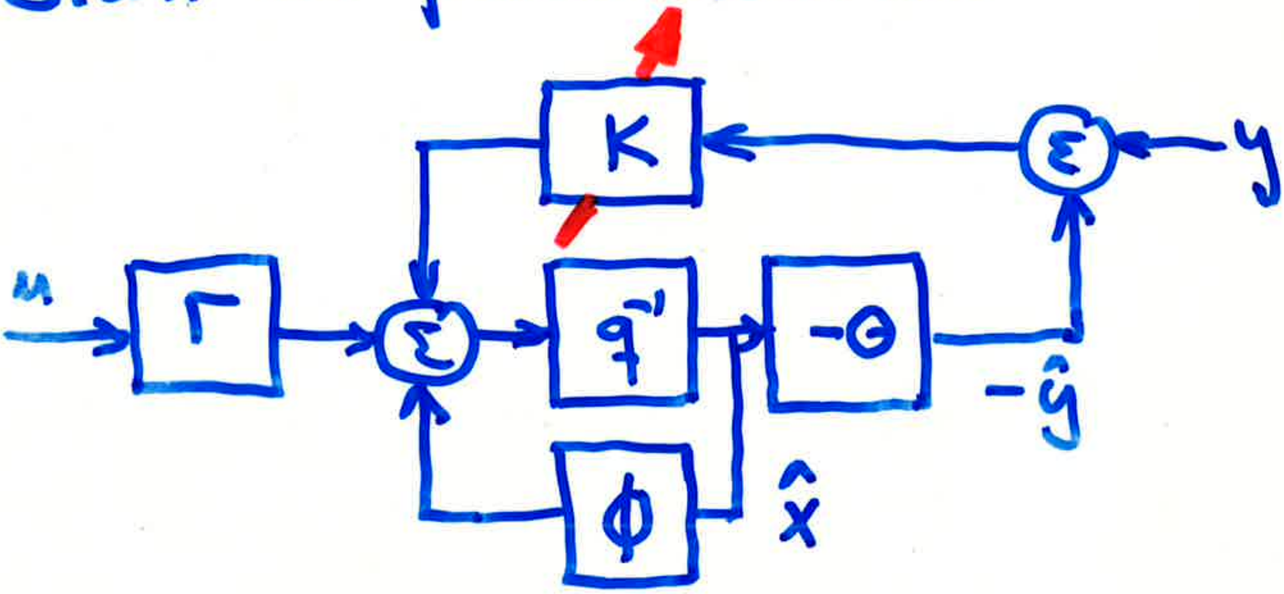
Dagens idé:

Ledningarna är dragna

Ställ in parametrarna



Kap 5 Parametrisk optimering

- Utvärdera uppförande
  Ansätt styrlag eller observ.
- Optimera

Frekvens $\longleftrightarrow$ Tidsdomän

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} G(s)G(-s)\,ds \qquad \dot{P} = AP + PA^T + R_1$$

$$\oint H(z)H(z^{-1})\frac{dz}{z} \qquad P(k+1) = \phi P(k)\phi^T + R_1$$

Utvärdering av förlustfunktioner

Tidsdiskret

$$\sigma^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(w)\,dw = \left[\begin{array}{l} z = e^{iw} \\ dz = i e^{iw} dw \\ \int_{-\pi}^{\pi} = \oint \end{array}\right]$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{iw}) H(e^{-iw})\,dw$$

$$= \frac{1}{i} \oint H(z) H(z^{-1}) \frac{dz}{z}$$

$$= \frac{1}{i} \oint \frac{B(z) B(z^{-1})}{A(z) A(z^{-1})} \frac{dz}{z}$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2\pi i} \oint H(z) H(z^{-1}) \frac{dz}{z}}$$

- Residuekalkyl
- Rekursiv evaluering
  Stabilitetstablån + lika mycket till

Reciproke polynom

$A(z) = a_0 z^n + \ldots + a_n \quad a_0 > 0$

$B(z) = b_0 z^n + \ldots + b_n$

$A^*(z) = z^n A(z^{-1}) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$

$A^*(z^{-1}) = a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}$

Rekonstruktion - Observerare

$$\begin{cases} x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma u(t) + v(t) \\ y(t) = \Theta x(t) + e(t) \end{cases}$$

$E x(t_0) = m \qquad \mathrm{Var}(x(t_0)) = R_0$

$E v = 0 \qquad \mathrm{Var}\, v = R_1$

$E e = 0 \qquad \mathrm{Var}\, e = R_2 \qquad R_{12} = 0$ just nu

Ansätt

$$\hat{x}(t+1) = \Phi \hat{x}(t) + \Gamma u(t) + K[y(t) - \Theta \hat{x}(t)]$$

Problem

Givet vektorn a. Bestäm $K(t)$ $t = t_0, t_0+1, \ldots$ så att $a^T x$ rekonstrueras så bra som möjligt i medelkvadrat-mening

a?!

VAD ÄR EN OBSERVERARE?

(Kwakernak - Sivan p 329 Brusfria fallet)

Def Systemet

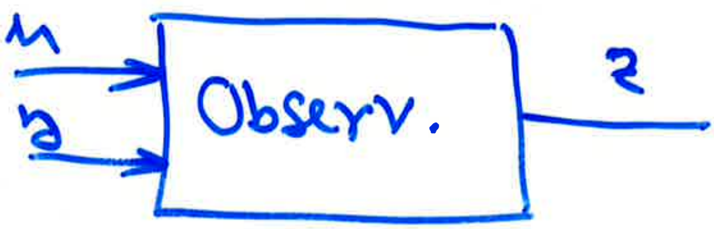
$$\dot{q} = Fq + Gy + Hu$$
$$z = Kq + Ly + Mu$$

är en observerare för

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad (*)$$

om för varje initialvärde $x(t_0)$ där existerar $q(t_0) = q_0$ så att

$$z(t) = x(t) \quad t \geq t_0$$



7

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + Gy + Hu$$

är en observerare till (*) om och endast om

$$F = A - KC$$
$$G = K$$
$$H = B$$

där K är godtycklig tidsvariabel matris

Lösning

$$\tilde{x}(t+1) = x(t+1) - \hat{x}(t+1)$$
$$= \Phi\tilde{x}(t) + v(t) - K[y - \Theta\hat{x}(t)]$$
$$= (\Phi - K\Theta)\tilde{x}(t) + v(t) - Ke(t)$$

$$E\tilde{x}(t+1) = (\Phi - K\Theta)E\tilde{x}(t)$$

Välj $\hat{x}(t_0) = m \Rightarrow$ Medelv. riktigt

Minimera variansen

$$P(t) = E\,\tilde{x}(t)\tilde{x}(t)^T$$

$$P(t+1) = (\Phi - K\Theta)P(t)(\Phi - K\Theta)^T + R_1 + KR_2K^T$$

$$P(t_0) = R_0$$

$a^T x \Rightarrow$

$$a^T P(t+1) a = a^T[\ldots\ldots]a$$

Kvadratisk i K

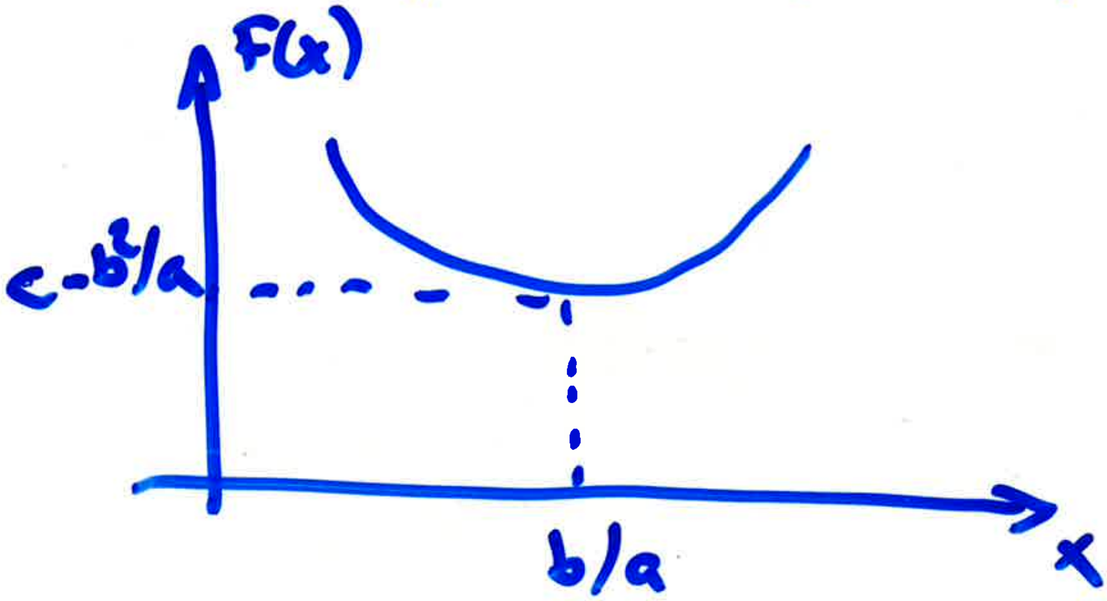
Kvadratkomplettering

Användbart!

Skalära fallet

$$F(x) = ax^2 - 2bx + c$$

$$= (x - b/a)\, a\, (x - b/a) + c - b^2/a$$



$$P(t+1) = (\Phi - K\Theta)P(\Phi - K\Theta)^T + R_1 + KR_2K^T$$

$$= \Phi P \Phi^T - K\Theta P \Phi^T - \Phi P \Theta^T K^T$$

$$+ K\Theta P \Theta^T K^T + R_1 + KR_2K^T$$

$$= \Phi P \Phi^T + R_1 + K(\Theta P \Theta^T + R_2)K^T$$

$$- K\Theta P \Phi^T - \Phi P \Theta^T K^T$$

$$= \Phi P \Phi^T + R_1 - \Phi P \Theta^T(\Theta P \Theta^T + R_2)^{-1}\Theta P \Phi^T$$

$$[K - \Phi P \Theta^T(\Theta P \Theta^T + R_2)^{-1}](\Theta P \Theta^T + R_2) \cdot$$

$$\cdot [K - \Phi P \Theta^T(\Theta P \Theta^T + R_2)^{-1}]^T$$

$aP(t+1)a^T$ minimeras om

$$K(t) = \Phi P(t)\Theta^T(\Theta P(t)\Theta^T + R_2(t))^{-1}$$

$$P(t+1) = \Phi P(t)\Phi^T + R_1(t) -$$

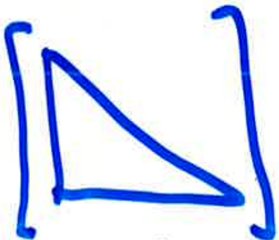
$$\Phi P(t)\Theta^T(\Theta P(t)\Theta^T + R_2)^{-1}\Theta P(t)\Phi^T$$

Egenskaper hos sammansatta matriser

* $A = DD^T \geq 0$

  > 0 iff $\operatorname{rang}(D) = n$

* $A \geq 0,\ B \geq 0 \Rightarrow A + B \geq 0$
* $A > 0,\ B \geq 0 \Rightarrow A + B > 0$
* $A \geq 0 \Rightarrow BAB^T \geq 0$
* $A > 0 \Rightarrow A = BB^T$

$B =$  diag $B > 0$

Cholesky dekomposition

$B \Sigma B^T = A$

POS. DEF. MATRISER

A $n \times n$ symmetrisk

A pos def om $x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$

Test

1. Pos def
   All leading minors > 0

2. Non neg def
   All minors med diagonal element ≥ 0

3. A symm $\quad A > 0$ iff $\lambda_i > 0$
   $A \geq 0 \quad \lambda_i \geq 0$

Variansekvationen

$$P(t+1) = (\Phi - K\Theta)P\Phi^T + R_1$$

$$= (\Phi - K\Theta)P(\Phi - K\Theta)^T + R_1 + KR_2K^T$$

- $P(t)$ icke neg def $\Rightarrow$
  $P(t+1)$ — " —
- $(\Phi P \Phi^T + R_2)^{-1}$ $\exists$ om $R_2 > 0$
- $R_{12} \neq 0$

$$\begin{cases} K = (\Phi P \Theta^T + R_{12})(\Theta P \Theta^T + R_2)^{-1} \\ P(t+1) = \Phi P \Phi^T + R_1 - K(R_2 + \Theta P \Theta^T)K^T \end{cases}$$

- Tolkning av P

Tidskontinuerliga system

$$\begin{cases} dx = Ax\,dt + Bu\,dt + dv \\ dy = Cx\,dt + de \end{cases}$$

$$d\hat{x} = A\hat{x}\,dt + Bu\,dt + K[dy - C\hat{x}\,dt]$$

$$d\tilde{x} = (A-KC)\tilde{x}\,dt + dv - K\,de$$

Välj $E\hat{x} = m$

$$\frac{dP}{dt} = (A-KC)P + P(A-KC)^T + R_1 + KR_2K^T$$

$$= AP + PA^T + R_1 - (KCP + PC^TK^T - KR_2K^T)$$

Minimum

$$E(a^T\hat{x})^2 = a^TPa$$

Lemma 5.1

Låt P och Q vara lösningar till Riccatiekvationerna

$$\dot{P} = AP + PA^T + R_1 + KR_2K^T - KCP - PC^TK^T$$
$$\dot{Q} = AQ + QA^T + R_1 - QC^TR_2^{-1}CQ$$

$R_2 > 0 \quad P(t_0) = Q(t_0) = R_0$

då gäller att

$$P - Q \geq 0$$
$$P(t) = Q(t) \text{ för } K = PC^TR_2^{-1}$$

Titta igenom beviset

Optimala observeraren

$$d\hat{x} = A\hat{x}\,dt + Bu\,dt + K[dy - C\hat{x}\,dt]$$

$$K = PC^T R_2^{-1}$$

$$\dot{P} = AP + PA^T + R_1 - PC^T R_2^{-1} CP$$

$$P(t_0) = R_0$$

Vad händer då

- $R_2^{-1} \nexists$
- $R_{12} \neq 0$