

PREDIKTION OCH FILTERING

- Prediktionsproblemet
 - Förlustfunktionen
 - Tre bra teorem
 - Generella filterproblemet
 - Tidskontinuerliga fallet
- Dualitet

Dagens idé

$$E\{x(t+1) | y_t\}$$

är bäst

Prediktion och filtrering

$$y(t) = s(t) + n(t)$$

└─ brus
└─ signal

$\hat{s}(t+\tau|t)$ prediktion

$\hat{s}(t|t)$ filtrering

$\hat{s}(t-\tau|t)$ utjämning (smoothing)

Generellare fall

- Modell

- Kriterium

- Tillåtna estimatorer

$$O_t = [y^T(t) \dots y^T(t)]$$

Modell

$$\begin{cases} x(t+1) = \phi x(t) + v \\ y(t) = \theta x(t) + e \end{cases}$$

Kriterium 1

- Allmän formulering

$$E\{L(s-\hat{s})\} = E_{\eta}\{E\{L(s-\hat{s})|\eta\}\}$$

$$P(s|t_1) \leq \sigma | y(t) = \eta(t) \quad t_0 \leq t \leq t = F(\sigma|\eta)$$

$f(\sigma|\eta)$ täthetsfkn

Theorem 2.1

- L symmetrisk och icke avtagande för positiva argument
- $f(\sigma|\eta)$ symmetrisk runt $m = \int \sigma f(\sigma|\eta) d\sigma$

$\Rightarrow$ Bästa estimatet

$$\hat{s} - \hat{s}(\eta) = E(s|\eta) = \int \sigma f(\sigma|\eta) d\sigma$$

oBS Normalfördelning $\Rightarrow E(s|\eta)$

linjärt i $\eta \Rightarrow$ Linjär estimator för alla L

Flervariabel normalfördelning

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} (\det R)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-m)^T R^{-1}(x-m)\right\}$$

Theorem 3.1 (Viktig)

$$\begin{matrix} x & n \times 1 & y & p \times 1 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in N\left(\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xy} \\ R_{yx} & R_{yy} \end{bmatrix}\right) \end{matrix}$$

$$z = x - m_x - R_{xy} R_{yy}^{-1} (y - m_y)$$

1) z är oberoende av y

$$2) E z = 0$$

$$3) \text{Cov}(z) = R_z = R_{xx} - R_{xy} R_{yy}^{-1} R_{yx}$$

Beweis:

Vad betyder detta?

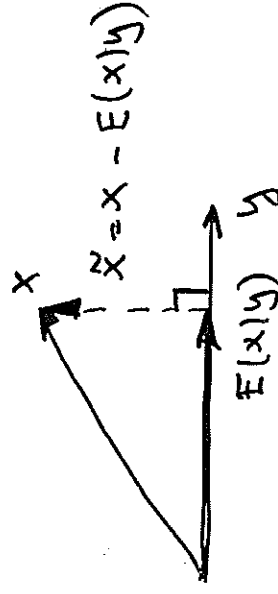
$$\text{Th 2.1} \quad E(x|y) = \hat{x} \text{ bästa estimatet}$$

$$\text{Th 3.2} \quad \hat{x} = m_x + R_{xy} R_{yy}^{-1} (y - m_y) \\ (\text{linjär i } y)$$

$$E \hat{x} \hat{x}^T = R_{xx} - R_{xy} R_{yy}^{-1} R_{yx}$$

$\hat{x}$ oberoende av y

Geometrisk tolkning



Theorem 3.2 Också viktigt

x, y normalfördelade

- 1) $E(x|y) = m_x + R_{xy} R_y^{-1} (y - m_y)$
- 2) $E\{(x - E(x|y))(x - E(x|y))'\} = R_x - R_{xy} R_y^{-1} R_{yx}$
- 3) y och $x - E(x|y)$ oberoende

Theorem 3.3

x, u, v normalförd u, v obero.

$$E\{x|u, v\} = E(x|u) + E(x|v) - E(x)$$

TILLSTÄNDESTIMERING

$$\begin{cases} x(t+1) = \phi x(t) + v(t) \\ y(t) = \theta x(t) + e(t) \end{cases}$$

Sätt bara igång och räkna!

$$\hat{x}(t+1|t) = E\{x(t+1) | y(t_0), \dots, y(t)\}$$

$$= E\{x(t+1) | y_t\}$$

$$= E\{x(t+1) | y_{t-1}, y_t\}$$

$$\stackrel{a}{=} E\{x(t+1) | y_{t-1}, \tilde{y}_t\}$$

$$\stackrel{Th 3.3}{=} E\{x(t+1) | y_{t-1}\} + E\{x(t+1) | \tilde{y}_t\}$$

$$- E\{x(t+1)\}$$

$$\tilde{y}_t = y_t - E(y_t | y_{t-1})$$

$$= \theta \tilde{x}_t + e(t)$$

$$\Rightarrow \tilde{y}_t = \theta \tilde{x}_{t-1} \text{ oberoende}$$

INNOVATIONS REPRESENTATION

$\tilde{y}(t)$ innovationer

$$\tilde{y}(t) = y(t) - E(y(t) | \mathcal{Y}_{t-1}) = e\tilde{x} + e(t)$$

$$\text{cov}(\tilde{y}(t), \tilde{y}(s)) = \begin{cases} ePe^T + R_2 & t = s \\ 0 & t \neq s \end{cases}$$

Kan representera $y(t)$ som

$$\hat{x}(t+1) = \phi \hat{x}(t) + K \tilde{y}(t)$$

$$y(t) = \Theta \hat{x}(t) + \tilde{y}(t)$$



Tidskont. estimering

Modell

$$\begin{cases} dx = Ax dt + dv \\ dy = Cx dt + de \end{cases}$$

Dualitet — Deterministiskt
reglerproblem
(Vet ej lösn. ännu!)

$$\frac{dz}{dt} = -A^T z + C^T \mu$$

$$z(t_0) R_0 z(t_0) + \int_{t_0}^t [z^T R_1 z + \mu^T R_2 \mu] dt$$

Teorem 6.2 Kalman - Bucy

$$\begin{cases} d\hat{x} = A\hat{x} dt + K [dy - C\hat{x} dt] \\ \hat{x}(t_0) = \bar{x} \\ K = PC^T R_2^{-1} \\ \dot{P} = AP + PA^T + R_1 - PC^T R_2^{-1} CP \\ P(t_0) = R_0 \end{cases}$$